This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 447288

PROPERTY OF
University of Michigan Libraries
1817
ARTES SCIENTIA VERITAS

A
.D8
.D39
1894

MÉMOIRE

SUR

L'APPLICATION

D'UNE

MÉTHODE VECTORIELLE

A L'ÉTUDE DE

DIVERS SYSTÈMES DE DROITES

(Complexes, Congruences, Surfaces Réglées)

PAR

ALPHONSE DEMOULIN

Répétiteur à l'Université de Gand.

BRUXELLES
ALFRED CASTAIGNE, ÉDITEUR
28, rue de Berlaimont, 28

PARIS
NONY ET Cie, ÉDITEURS
17, rue des Écoles, 17

1894

APPLICATION

D'UNE

MÉTHODE VECTORIELLE

MÉMOIRE

SUR

LAPPLICATION

D'UNE

MÉTHODE VECTORIELLE

A L'ÉTUDE DE

DIVERS SYSTÈMES DE DROITES

(Complexes, Congruences, Surfaces Réglées)

PAR

ALPHONSE DEMOULIN

Répétiteur à l'Université de Gand.

BRUXELLES
ALFRED CASTAIGNE, ÉDITEUR
28, rue de Berlaimont, 28

PARIS
NONY ET Cie, ÉDITEURS
17, rue des Écoles, 17

1894

Gen. Pub
exch
Univ. de Ghent
10-4-49

QA
608
D39
1894

Ce mémoire est consacré à l'étude de divers systèmes de droites : complexes, congruences, surfaces réglées. Nous y faisons un fréquent usage d'une méthode vectorielle au sujet de laquelle nous allons entrer dans quelques détails.

Cette méthode est basée sur l'emploi systématique de deux combinaisons différentes de deux vecteurs : le *produit géométrique* et le *moment géométrique.*

Le produit géométrique de deux vecteurs est le produit des longueurs de ces vecteurs par le cosinus de leur angle.

Le moment géométrique d'un vecteur $\bar{a}$ par un vecteur $\bar{b}$ est un troisième vecteur, représentatif de l'aire du parallélogramme construit sur les deux premiers comme côtés.

Le produit géométrique a été défini par M. Resal (*Traité de Cinématique pure*, Paris, Mallet-Bachelier, 1862) ; la notion du moment géométrique est due à M. Massau (*Cours de Mécanique de l'Université de Gand*, 1re éd. 1879, 3e éd. 1891 ; Gand, Lobel ; Paris, Gauthier-Villars).

A la vérité, avant ces auteurs, et à peu près à l'époque où Grassmann publiait ses recherches, de Saint Venant (1) avait défini, sous le nom de *produit géométrique d'une aire par un vecteur* et de *produit géométrique de deux vecteurs*, des combinaisons analogues à celles qui ont été étudiées par MM. Resal et Massau ; mais si l'on se reporte à la Note citée, on reconnaîtra sans peine que les équations *aréaires* et celles qu'on peut en déduire n'ont pas la précision

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*, 1845, 2e semestre, p. 620.

BKD

010-6-49 BKD

qu'offrent les équations qui résultent de l'emploi du produit et du moment géométriques. Pour leur donner cette précision, il faudrait substituer aux aires planes les vecteurs qui les représentent ; c'est précisément en cela que consiste le progrès réalisé par M. Massau.

D'un autre côté, la méthode dont nous parlons a des rapports évidents avec celle des quaternions : le produit géométrique de deux vecteurs et le moment géométrique d'un vecteur par un autre ne sont pas différents, en effet, de ce que, dans la méthode des quaternions, on appelle la *partie scalaire* (au signe près) et la *partie vectorielle* du produit de ces vecteurs.

Il suit de là que les calculs auxquels conduira l'application de la méthode actuelle seront au fond identiques à ceux qui résulteraient de l'emploi de la méthode des quaternions. Néanmoins la méthode de MM. Resal et Massau peut exister à côté de cette dernière, parce que, tout en lui étant équivalente dans bien des cas, elle est susceptible d'une exposition beaucoup plus simple.

Dans son *Cours de Mécanique*, M. Massau a fait voir que cette méthode permet d'exposer avec simplicité et élégance les théories fondamentales de la mécanique ; nous espérons avoir montré, dans le présent travail, qu'elle n'est pas moins utile dans l'étude de certaines questions relatives à la Géométrie de la droite.

Comme la méthode actuelle est peu connue, nous l'exposons succinctement dans une *Introduction ;* les neuf premiers paragraphes de cette introduction sont extraits, en substance, de l'ouvrage cité de M. Massau, lequel renferme une exposition détaillée de la méthode ; nous y renverrons le lecteur désireux d'approfondir l'étude de cette théorie.

ERRATA.

Page 6, ligne 18, au lieu de $\overline{V} \pm a$, lire $\overline{V} \pm \mathfrak{a}$.

Page 13, ligne 9, supprimer les barres verticales qui entourent sin θ.

Page 14, ligne 19, au lieu de $\overline{OM}_1$, lire $\overline{OM}$.

Page 14, ligne 20, au lieu de $\overline{OM'}_1$, lire $\overline{OM'}$.

Page 16, lignes 16, 17, 18, au lieu de $\xi = x\,Y - y\,X$, lire $\xi = y\,Z - z\,Y$,

$$\eta = y\,Z - z\,Y, \qquad \eta = z\,X - x\,Z,$$

$$\zeta = z\,X - x\,Z, \qquad \zeta = x\,Y - y\,X.$$

Page 19, ligne 17, au lieu de α et α', lire $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$.

Page 28, ligne 13, au lieu de *Multiplions en équation....* lire *Multiplions ces équations....*

Page 56, ligne 2, au lieu de *est le point tangent....* lire *est le plan tangent....*

Page 73, ligne 22, remplacer Δ et Δ' par D_1 et D_2.

Page 103, ligne 22. au lieu de $y^2 + z^2 = k$, lire $y^2 + z^2 = k^2$.

Page 108, lignes 15 et 16, au lieu de : *Un complexe de Paivin étant donné, il existe une infinité de relations entre les carrés d'une droite....*, lire *Un complexe de Painvin étant donné, il existe une infinité de relations entre les carrés des distances d'une droite....*

INTRODUCTION.

I. Vecteurs.

1. Soit AB un segment rectiligne que nous supposerons parcouru par un mobile allant de A en B. Dans ce segment, il y a lieu de distinguer 1° une grandeur : la distance des points A et B; 2° une direction : celle de la droite indéfinie AB; 3° un sens : celui du mouvement du mobile.

Nous donnerons au segment AB ainsi envisagé le nom de *vecteur* et nous le représenterons par la notation $\overline{AB}$, le trait placé au-dessus de AB rappelant qu'il s'agit d'un segment dirigé. Le point A sera dit l'*origine* du vecteur et le point B son *extrémité*.

Soit a le nombre qui mesure la longueur AB, rapportée à une certaine unité. Nous représenterons également le vecteur $\overline{AB}$ par la notation $\bar{a}$ et nous appellerons a la *grandeur* ou le *module* du vecteur. Cette grandeur sera désignée par la notation gr et nous écrirons en conséquence

$$a = \text{gr}\,\bar{a} = \text{gr}\,\overline{AB}.$$

Lorsque la longueur d'un vecteur sera prise pour unité, ce vecteur sera dit *unitaire*.

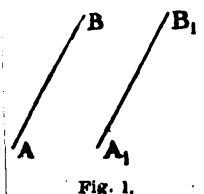


Fig. 1.

2. Lorsque deux vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{A_1B_1}$ auront même grandeur, même direction et même sens, nous dirons qu'ils sont *égaux* et nous écrirons

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}.$$

3. Deux ou plusieurs vecteurs étant donnés, on peut les combiner d'une manière arbitraire et en déduire d'autres vecteurs ou même des nombres. Certaines de ces combinaisons se présentent souvent dans les applications et acquièrent ainsi une importance particulière. Nous allons les définir et étudier leurs propriétés. Il en résultera une *méthode vectorielle*, c'est-à-dire un ensemble de règles au moyen desquelles on pourra soumettre les vecteurs au calcul.

II. Sommes et différences géométriques.

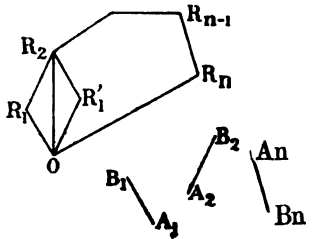


Fig. 2.

4. Soient $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, ..., $\overline{A_nB_n}$ n vecteurs quelconques. Portons ces vecteurs bout à bout, à partir d'une origine arbitraire O, dans l'ordre indiqué ; nous aurons

$$\overline{OR_1} = \overline{A_1B_1},\ \overline{R_1R_2} = \overline{A_2B_2},\ \ldots,\ \overline{R_{n-1}R_n} = \overline{A_nB_n}.$$

Joignons l'origine O à l'extrémité R_n du contour. Par définition, le vecteur $\overline{OR_n}$ est la *somme géométrique* des vecteurs $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$, ..., $\overline{A_nB_n}$. Nous exprimerons ce fait en posant l'*égalité géométrique*

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \ldots + \overline{A_nB_n} = \overline{OR_n}.$$

L'addition géométrique est l'opération qui consiste à faire la somme géométrique de plusieurs vecteurs.

5. Si le point R_n coïncidait avec le point O, le contour polygonal $OR_1R_2\ldots R_n$ se fermerait de lui-même et la somme géométrique $\overline{OR_n}$ se réduirait à O. Donc : *Lorsque des vecteurs* $\overline{A_1B_1}$, ..., $\overline{A_nB_n}$ *forment un contour polygonal fermé, leur somme géométrique est nulle, et réciproquement.*

6. Considérons maintenant deux vecteurs $\overline{A_1B_1}$ et $\overline{A_2B_2}$. En se reportant à la figure 2 et en tirant OR_2, on voit que le vecteur $\overline{OR_2}$

est la somme géométrique des vecteurs $\overline{A_1B_1}$ et $\overline{A_2B_2}$. Mais le parallélogramme $OR_1R_2R'_1$, construit sur OR_1 et R_1R_2 comme côtés, montre que $\overline{OR_2}$ est la somme géométrique des vecteurs $\overline{A_2B_2}$ et $\overline{A_1B_1}$. On peut donc écrire

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} = \overline{A_2B_2} + \overline{A_1B_1}.$$

En d'autres termes, *l'addition géométrique est commutative.*

Il suit de là que la somme géométrique de plusieurs vecteurs est indépendante de l'ordre dans lequel on porte ces vecteurs à partir d'une certaine origine.

7. Soient A et B deux points quelconques ; joignons-les par une droite et considérons les deux vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$: ils ont même grandeur, même direction et des sens opposés. En leur appliquant la règle de l'addition, on trouve une somme nulle ; donc

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0. \qquad (1)$$

Nous écrirons aussi

$$\overline{BA} = -\overline{AB}. \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) sont absolument équivalentes. L'égalité (2) donne la signification qu'il faut attribuer au signe —.

8. Si l'on fait la somme géométrique de deux, trois, ..., m vecteurs égaux à $\bar{a}$, on obtiendra des vecteurs que nous représenterons par $2\,\bar{a}$, $3\,\bar{a}$, ..., $m\,\bar{a}$. Plus généralement, m étant un nombre positif quelconque, $m\bar{a}$ représentera un vecteur de grandeur ma et dont la direction et le sens seront ceux du vecteur $\bar{a}$. Quant à la notation $-m\bar{a}$, elle représentera un vecteur de grandeur ma, de même direction que le vecteur $\bar{a}$ et de sens opposé. Enfin, si m est négatif et égal à $-m'$, $(m' > 0)$, l'expression $m\bar{a}$ sera égale, par définition, à $-m'\bar{a}$.

Nous appellerons *monôme géométrique* une expression telle que $m\bar{a}$, m étant un nombre quelconque, positif ou négatif.

Soient $m_1 \bar{a}_1$, $m_2 \bar{a}_2$, $m_3 \bar{a}_3$, ... différents monômes géométriques ; toute expression de la forme

$$m_1 \bar{a}_1 - m_2 \bar{a}_2 + m_3 \bar{a}_3 + \ldots$$

recevra le nom de *polynôme géométrique*. Par définition, elle sera égale à la somme géométrique des vecteurs $m_1 \bar{a}_1$, $- m_2 \bar{a}_2$, $m_3 \bar{a}_3$, ...

9. Les polynômes géométriques jouissent des propriétés suivantes :

Propriété I. *On peut intervertir l'ordre des termes d'un polynôme géométrique sans altérer la valeur de ce polynôme.*

Ce théorème est une conséquence immédiate de la commutativité de l'addition géométrique.

Propriété II. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre tous les termes d'un polynôme géométrique, le polynôme est lui-même multiplié ou divisé par ce nombre.*

Soient $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ les vecteurs dont la somme géométrique constitue le polynôme géométrique considéré. Si l'on appelle $\bar{s}$ la valeur de ce polynôme, on pourra écrire :

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n = \bar{s}. \tag{3}$$

Je dis que, ρ désignant un nombre quelconque, on a

$$\rho\bar{a}_1 + \rho\bar{a}_2 + \ldots + \rho\bar{a}_n = \rho\,(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n).$$

L'égalité (3) montre que les vecteurs $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ et $-\bar{s}$, portés bout à bout, forment un contour polygonal fermé. La figure homothétique de ce polygone par rapport à un pôle quelconque sera encore un contour polygonal fermé et, si ρ est le rapport d'homothétie, les côtés de ce dernier contour pourront être représentés par $\rho\bar{a}_1$, $\rho\bar{a}_2$, ..., $\rho\bar{a}_n$, $-\rho\bar{s}$. En vertu d'une remarque faite précédemment (n° 5), ils auront une somme nulle ; donc

$$\rho\bar{a}_1 + \rho\bar{a}_2 + \ldots + \rho\bar{a}_n - \rho\bar{s} = 0$$

d'où

$$\rho\bar{a}_1 + \rho\bar{a}_2 + \ldots + \rho\bar{a}_n = \rho\,(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n).\quad \text{CQFD}$$

Propriété III. *Pour additionner géométriquement deux polynômes géométriques, on opère comme s'il s'agissait de polynômes algébriques.*

On a, par exemple,

$$(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_m) + (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \ldots + \bar{b}_n) = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_m + \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \ldots + \bar{b}_n.$$

10. Soient $\overline{A_1B_1}$ et $\overline{A_2B_2}$ deux vecteurs quelconques.

La *différence géométrique* de ces deux vecteurs est égale, par définition, au polynôme géométrique $\overline{A_1B_1} - \overline{A_2B_2}$.

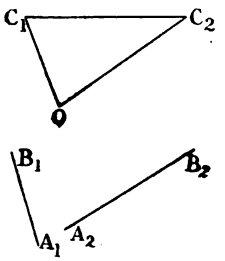


Fig. 3.

Pour l'évaluer, on ajoutera géométriquement au vecteur $\overline{A_1B_1}$ le vecteur $\overline{B_2A_2}$. Si donc on porte, à partir d'une origine O, $\overline{OC_1}$ égal à $\overline{A_1B_1}$ et $\overline{OC_2}$ égal à $\overline{A_2B_2}$, le vecteur $\overline{C_2C_1}$ sera la différence géométrique cherchée.

Soustraire $\overline{A_2B_2}$ de $\overline{A_1B_1}$, c'est déduire de ces deux vecteurs le polynôme $\overline{A_1B_1} - \overline{A_2B_2}$.

11. Nous terminerons ce paragraphe en démontrant une dernière propriété des polynômes géométriques.

Propriété IV. *Pour soustraire d'un polynôme géométrique un autre polynôme géométrique, on écrit le second polynôme géométrique à la suite du premier en changeant le signe de chacun de ses termes.*

Soit à soustraire du polynôme $\bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_m$ le polynôme $\bar{b}_1 + \ldots + \bar{b}_n$. D'après la définition de la soustraction, cela revient à ajouter au polynôme $\bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_m$ le polynôme $-\bar{b}_1 - \ldots - \bar{b}_n$.

On trouve ainsi *(Propriété III)*

$$\bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_m - \bar{b}_1 - \ldots - \bar{b}_n,$$

résultat conforme à la règle énoncée.

III. Équations géométriques.

12. Lorsque deux polynômes géométriques $\overline{U}$ et $\overline{V}$ seront égaux, nous écrirons

$$\overline{U} = \overline{V}$$

et nous dirons que cette formule est une *égalité* ou *équation géométrique*.

Nous avons déjà considéré des équations géométriques particulières aux nos 2 et 4. Au n° 2, $\overline{U}$ et $\overline{V}$ étaient des monômes, au n° 4 $\overline{U}$ était un polynôme et $\overline{V}$ un monôme.

Les égalités géométriques jouissent de quelques-unes des propriétés des égalités algébriques.

Propriété I. *On peut augmenter ou diminuer d'un même vecteur les deux membres d'une égalité géométrique.*

Si les deux polynômes $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont égaux, il en sera de même des polynômes $\overline{U} \pm \bar{a}$, $\overline{V} \pm a$; donc

$$\overline{U} \pm \bar{a} = \overline{V} \pm \bar{a}.$$

Propriété II. *On peut faire passer un terme d'un membre dans un autre à condition de changer son signe.*

Soit l'équation géométrique

$$\overline{U} + \bar{a} = \overline{V}.$$

En soustrayant des deux membres le vecteur $\bar{a}$, ce qui est permis, on trouve

$$\overline{U} = \overline{V} - \bar{a}.$$

Propriété III. *On peut multiplier ou diviser par un même nombre tous les termes d'une équation géométrique.*

Si l'on multiplie ou qu'on divise par un même nombre tous les termes de l'équation

$$\overline{U} = \overline{V},$$

les deux polynômes géométriques $\overline{U}$ et $\overline{V}$ seront multipliés ou divisés par ce nombre. L'égalité géométrique ne cessera donc pas d'avoir lieu.

13. Supposons que dans l'équation géométrique

$$(4) \qquad m_1 \bar{a}_1 - m_2 \bar{a}_2 + \ldots = 0,$$

les différents vecteurs $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ... soient parallèles à un même axe OX. Portons, suivant cet axe, un vecteur unitaire $\bar{u}$. On a

$$\bar{a}_i = a_i \varepsilon_i \bar{u},$$

ε_i étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que les vecteurs $\bar{a}_i$ et $\bar{u}$ seront de même sens ou de sens opposés. L'équation (4) devient donc

$$(m_1 a_1 \varepsilon_1 - m_2 a_2 \varepsilon_2 + \ldots)\, \bar{u} = 0.$$

On en déduit

$$(5) \qquad m_1 a_1 \varepsilon_1 - m_2 a_2 \varepsilon_2 + \ldots = 0.$$

Réciproquement, l'équation (5) entraîne l'équation (4).

IV. Équations de projection.

14. Considérons dans l'espace un axe OX et un vecteur quelconque $\overline{AB}$. Soient A' et B' les projections, orthogonales ou obliques, sur l'axe OX des extrémités A et B du vecteur $\overline{AB}$. Nous donnerons au vecteur $\overline{A'B'}$ le nom de *projection géométrique* du vecteur $\overline{AB}$ sur l'axe OX et nous le désignerons par la notation pg $\overline{AB}$.

Soit le vecteur $m.\ \overline{AB}$, m désignant un nombre quelconque ; sa projection géométrique sur l'axe OX sera égale à $m.\overline{A'B'}$ et l'on aura

$$\text{pg}\,(m.\overline{AB}) = m.\overline{A'B'} = m.\ \text{pg}\ \overline{AB}.$$

Les coefficients numériques peuvent donc sortir du signe de projection.

15. Attribuons à l'axe OX un sens déterminé, celui du vecteur $\overline{OX}$ par exemple. Nous appellerons *projection algébrique* du vecteur $\overline{AB}$ sur OX la quantité $\varepsilon . \text{gr}\,\overline{A'B'}$, ε étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que les vecteurs $\overline{A'B'}$ et $\overline{OX}$ auront même sens ou des sens opposés. Cette projection sera désignée par la notation $(\overline{AB})_x$; nous écrirons en conséquence

$$(\overline{AB})_x = \varepsilon . \text{gr}\,\overline{A'B'} = \varepsilon . \text{gr pg}\,\overline{AB}.$$

16. Considérons maintenant l'équation géométrique

$$m_1 \bar{a}_1 - m_2 \bar{a}_2 + \ldots = 0 ; \qquad (6)$$

elle exprime que les vecteurs $m_1\bar{a}_1$, $-m_2\bar{a}_2$, ..., portés bout à bout, constituent un contour polygonal fermé ; les projections géométriques de ces vecteurs ont donc une somme nulle, ce qui s'écrit

$$\text{pg}\,(m_1 \bar{a}_1) - \text{pg}\,(m_2 \bar{a}_2) + \ldots = 0$$

ou

$$m_1 \text{ pg}\,\bar{a}_1 - m_2 \text{ pg}\,\bar{a}_2 + \ldots = 0.$$

Cette équation, du genre de celles qui ont été considérées au n° 12, peut être remplacée par l'équation algébrique

$$\varepsilon_1 m_1 . \text{gr pg}\,\bar{a}_1 - \varepsilon_2 m_2 . \text{gr pg}\,\bar{a}_2 + \ldots = 0$$

ε_i étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que les vecteurs $\text{pg}\,\bar{a}_i$ et $\overline{OX}$ sont de même sens ou de sens opposés.

Soit x_i la projection algébrique du vecteur $\bar{a}_i$ sur l'axe OX (auquel nous avons donné le sens du vecteur $\overline{OX}$). On a

$$x_i = \varepsilon_i . \text{gr pg}\,a_i$$

et l'équation précédente devient

$$m_1 x_1 - m_2 x_2 + \ldots = 0.$$

On peut donc, dans une équation géométrique, substituer aux différents vecteurs leurs projections algébriques sur un axe quelconque.

17. Soient Ox, Oy, Oz trois axes quelconques de coordonnées cartésiennes. Appelons x_i, y_i, z_i les projections algébriques du vecteur $\bar{a}_i$, les projections sur chacun des axes étant faites parallèlement au plan des deux autres. De l'équation (6), on déduit en vertu de ce qui précède

$$(7) \qquad \begin{cases} m_1 x_1 - m_2 x_2 + \ldots = 0, \\ m_1 y_1 - m_2 y_2 + \ldots = 0, \\ m_1 z_1 - m_2 z_2 + \ldots = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, les équations (7) entraînent l'équation (6), car elles expriment que les projections du vecteur $m_1\bar{a} - m_2\bar{a}_2 + \ldots$ sur les axes Ox, Oy, Oz sont nulles.

V. Produits géométriques.

18. On appelle *produit géométrique* de deux vecteurs le produit algébrique des grandeurs de ces vecteurs par le cosinus de leur angle.

On appelle *multiplication géométrique* l'opération qui consiste à faire le produit géométrique de deux vecteurs.

Soient $\overline{OA} = \bar{a}$ et $\overline{OB} = \bar{b}$ deux vecteurs quelconques ; leur produit géométrique sera représenté par l'une quelconques des notations

$$\overline{OA}.\overline{OB}, \quad \overline{OB}.\overline{OA}, \quad \bar{a}\,\bar{b}, \quad \bar{b}\,\bar{a}.$$

On aura donc, par définition, θ désignant l'angle des vecteurs $\bar{a}$ et $\bar{b}$,

$$\overline{OA}.\overline{OB} = \overline{OB}.\overline{OA} = \bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a} = ab\cos\theta.$$

Les vecteurs $\bar{a}$ et $\bar{b}$ seront appelés les *facteurs* du produit géométrique $\bar{a}\,\bar{b}$.

19. Soit b_x la projection algébrique orthogonale de $\bar{b}$ sur $\bar{a}$, on a

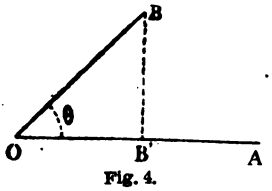


Fig. 4.

$$b_x = b\cos\theta$$

donc

$$\bar{a}\,\bar{b} = a.b\cos\theta = ab_x ;$$

de même

$$\bar{a}\,\bar{b} = ba_x.$$

Par conséquent, le produit géométrique de deux vecteurs est égal au produit algébrique de la grandeur de l'un des vecteurs par la projection algébrique orthogonale du second vecteur sur le premier.

20. Les règles de la multiplication des vecteurs sont les mêmes que celles de la multiplication algébrique.

1° *La règle des signes est applicable.* On a

$$\bar{a}\,(-\bar{b}) = -\bar{a}\,\bar{b}$$

car

$$\bar{a}\,(-\bar{b}) = ab\cos(\pi-\theta) = -ab\cos\theta = -\bar{a}\,\bar{b}.$$

On a aussi

$$(-\bar{a})\,(-\bar{b}) = \bar{a}\,\bar{b}$$

car

$$(-\bar{a})\,(-\bar{b}) = -\bar{a}\,(-\bar{b}) = -(-\bar{a}\,\bar{b}) = \bar{a}\,\bar{b}.$$

2° *Si l'on multiplie un des facteurs par une quantité algébrique, le produit est multiplié par cette quantité.* C'est ce qui résulte des égalités :

$$(m\,\bar{a}).\,\bar{b} = ma.\,b.\cos\theta = m\,\bar{a}\,\bar{b}$$

3° *Les polynômes géométriques se multiplient comme les polynômes algébriques.*

Soit à multiplier le polynôme $\bar{a}$:

$$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}'' + \bar{a}''' \qquad (8)$$

par le vecteur $\bar{b}$. On aura

$$(\bar{a}' + \bar{a}'' + \bar{a}''')\,\bar{b} = \bar{a}'\,\bar{b} + \bar{a}''\,\bar{b} + \bar{a}'''\,\bar{b}.$$

Pour démontrer cette égalité, projetons sur le vecteur $\overline{b}$ les deux membres de (8) ; nous aurons

$$a_x = a_x' + a_x'' + a_x'''$$

ou, en multipliant par b,

$$ba_x = ba_x' + ba_x'' + ba_x''' ;$$

or

$$ba_x = \overline{a}\,\overline{b},\ ba_x' = \overline{a'}\,\overline{b}, \text{ etc.},$$

donc

$$\overline{a}\,\overline{b} = \overline{a'}\,\overline{b} + \overline{a''}\,\overline{b} + \overline{a'''}\,\overline{b} \quad . \qquad \text{CQFD.}$$

Soit à multiplier le polynôme $\overline{a}$:

$$\overline{a} = \overline{a'} + \overline{a''} + \overline{a'''}$$

par le polynôme $\overline{b}$:

$$\overline{b} = \overline{b'} + \overline{b''} + \overline{b'''}.$$

On a

$$\overline{a}\,\overline{b} = (\overline{a'} + \overline{a''} + \overline{a'''})\overline{b} = \overline{a'}\,\overline{b} + \overline{a''}\,\overline{b} + \overline{a'''}\,\overline{b},$$

mais

$$\overline{a'}\,\overline{b} = (\overline{b'} + \overline{b''} + \overline{b'''})\overline{a'} = \overline{a'}\,\overline{b'} + \overline{a'}\,\overline{b''} + \overline{a'}\,\overline{b'''},$$
$$\overline{a''}\,\overline{b} = (\overline{b'} + \overline{b''} + \overline{b'''})\overline{a''} = \overline{a''}\,\overline{b'} + \overline{a''}\,\overline{b''} + \overline{a''}\,\overline{b'''}, \text{ etc.},$$

donc

$$(\overline{a'} + \overline{a''} + \overline{a'''})\,(\overline{b'} + \overline{b''} + \overline{b'''}) = \overline{a'}\,\overline{b'} + \overline{a'}\,\overline{b''} + \text{etc.}$$

En conséquence, pour multiplier l'un par l'autre deux polynômes géométriques, il suffit d'opérer comme s'il s'agissait de polynômes algébriques.

Il suit clairement de ce qui précède que l'on peut multiplier membre à membre deux égalités géométriques ; en particulier, on peut multiplier par un même vecteur les deux membres d'une égalité géométrique.

21. Lorsque les vecteurs $\overline{a}$ et $\overline{b}$ ont même direction et même sens, θ est nul et

$$\overline{a}\,\overline{b} = a\,b.$$

Si $\bar{b} = \bar{a}$, $\bar{a}\,\bar{b}$ devient $\bar{a}\bar{a}$; au lieu de $\bar{a}\bar{a}$ nous écrirons $\bar{a}^2$, pour la simplicité, et nous aurons, d'après la formule précédente,

$$\bar{a}^2 = a^2.$$

Si les vecteurs $\bar{a}$ et $\bar{b}$ étaient de même direction et de sens opposés, on aurait

$$\bar{a}\,\bar{b} = -ab.$$

22. *Expression analytique du produit géométrique de deux vecteurs* $\bar{a}$ *et* $\bar{b}$. Portons suivant trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz trois vecteurs unitaires $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$. Soient x, y, z les projections algébriques du vecteur $\bar{a}$ et X, Y, Z les projections algébriques du vecteur $\bar{b}$. On a

$$\bar{a} = x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3$$
$$\bar{b} = \mathrm{X}\bar{u}_1 + \mathrm{Y}\bar{u}_2 + \mathrm{Z}\bar{u}_3.$$

Multipliant ces égalités membre à membre et observant que

$$\bar{u}_1^2 = 1, \quad \bar{u}_2^2 = 1, \quad \bar{u}_3^2 = 1$$
$$\bar{u}_1\bar{u}_2 = 0, \quad \bar{u}_2\bar{u}_3 = 0, \quad \bar{u}_3\bar{u}_1 = 0,$$

on trouve

$$\bar{a}\,\bar{b} = x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z}.$$

VI. Moments géométriques.

23. Soient $\overline{\mathrm{OA}}$ et $\overline{\mathrm{OB}}$ deux vecteurs quelconques. On appelle *moment géométrique de* $\overline{\mathrm{OA}}$ *par* $\overline{\mathrm{OB}}$ et on représente par la notation

$$M\,\overline{\mathrm{OA}}.\overline{\mathrm{OB}}$$

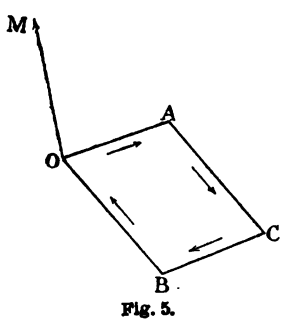


Fig. 5.

un vecteur dont la grandeur est proportionnelle à la surface du parallélogramme construit sur OA et OB comme côtés et dont la direction est perpendiculaire au plan de ce parallélogramme. Pour achever de définir ce vecteur, supposons le contour du parallélogramme parcouru par un mobile dans le sens OACBO ; le sens du moment géométrique sera

pris tel qu'un observateur placé le long de ce vecteur les pieds à l'origine et la tête à l'extrémité verrait le mobile se mouvoir dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre.

Posons

$$\overline{OA} = \bar{a}, \quad \overline{OB} = \bar{b}$$

et appelons $\bar{\mu}$ le moment géométrique de $\overline{OA}$ par $\overline{OB}$; nous aurons

$$\bar{\mu} = M\,\overline{OA.OB} = M\,\bar{a}\,\bar{b}$$

et

$$\mu = \text{gr}\,M\,\bar{a}\,\bar{b} = ab\,|\,\sin\theta\,|$$

θ désignant l'angle des vecteurs $\bar{a}$ et $\bar{b}$.

Les vecteurs $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ sont dits les *facteurs* du moment géométrique ; $\overline{OA}$ est le premier facteur et $\overline{OB}$ le second.

Il est à observer que le moment géométrique est perpendiculaire à ses deux facteurs et que le moment géométrique d'un vecteur par un vecteur parallèle est nul.

24. Il suit immédiatement de la définition du moment géométrique que l'on a

$$M\,\bar{a}\,\bar{b} = -M\,\bar{b}\,\bar{a}.$$

En d'autres termes, l'opération indiquée par le signe M n'est pas commutative. Cette particularité exceptée, le signe M se comporte comme le signe de la multiplication.

1° On voit aisément que

$$M\,(-\bar{a})\,\bar{b} = -M\,\bar{a}\,\bar{b}$$
$$M\,(-\bar{a})\,(-\bar{b}) = M\,\bar{a}\,\bar{b}.$$

2° *Si on multiplie un des facteurs par un nombre, le moment géométrique est multiplié par ce nombre :*

$$M\,(m\bar{a})\,\bar{b} = m\,M\,\bar{a}\,\bar{b}.$$

3° *Le moment d'une somme géométrique par un vecteur est égal à la somme géométrique des moments des vecteurs composants par ce vecteur.*

On a, par exemple,

$$(9) \qquad M\,\bar{a}\,\bar{b} = M\,\bar{a}'\,\bar{b} + M\,\bar{a}''\,\bar{b} + M\,\bar{a}'''\,\bar{b},$$

$\bar{a}$ désignant la somme

$$\bar{a}' + \bar{a}'' + \bar{a}'''.$$

Portons, à partir d'une origine O,

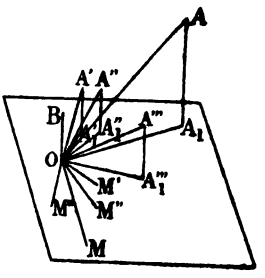


Fig. 6.

$$\overline{OA'} = \bar{a}',\ \overline{OA''} = \bar{a}'',\ \overline{OA'''} = \bar{a}''',$$
$$\overline{OA} = \bar{a},\ \overline{OB} = \bar{b}.$$

Menons par le point O un plan P perpendiculaire à $\bar{b}$ et projetons orthogonalement sur ce plan les points A',A'',A''', A respectivement en A_1',A_1'',A_1''',A_1. On aura évidemment

$$M\,\bar{a}\,\bar{b} = M\,\overline{OA_1}.\,\bar{b},\ M\,\bar{a}'\,\bar{b} = M\,\overline{OA_1'}.\,\bar{b},\ldots$$

L'égalité à démontrer revient donc à

$$M\,\overline{OA_1}.\,\bar{b} = M\,\overline{OA_1'}.\,\bar{b} + M\,\overline{OA_1''}.\,\bar{b} + M\,\overline{OA_1'''}.\,\bar{b}$$

ou à

$$\overline{OM} = \overline{OM'} + \overline{OM''} + \overline{OM'''}$$

pourvu qu'on pose

$$M\,\overline{OA_1}.\,\bar{b} = \overline{OM_1},\ M\,\overline{OA_1'}.\,\bar{b} = \overline{OM'},\ldots$$

Or, les vecteurs $\overline{OM}$, $\overline{OM'}_1,\ldots$, situés dans le plan P, sont perpendiculaires aux vecteurs $\overline{OA}_1$, $\overline{OA}_1',\ldots$ et de sens tels que l'angle de deux d'entre eux est égal à l'angle des vecteurs auxquels ils sont perpendiculaires (et non au supplément de cet angle) ; enfin leurs grandeurs sont proportionnelles à celles des vecteurs $\overline{OA}_1$, $\overline{OA}_1',\ldots$. Les vecteurs $\overline{OM}$, $\overline{OM'},\ldots$ forment donc une figure semblable à celle qui est formée des vecteurs $\overline{OA}_1$, $\overline{OA'}_1,\ldots$; mais $\overline{OA}_1$ est la somme géométrique des vecteurs $\overline{OA'}_1,\ldots$; on a donc

$$\overline{OM} = \overline{OM'} + \overline{OM''} + \overline{OM'''}. \qquad \text{CQFD.}$$

4° *Le moment d'un polynôme par un polynôme est égal à la somme géométrique des moments de chacun des termes du premier polynôme par chacun des termes du second.*

Soit à calculer $M\,\bar{a}\,\bar{b}$ en supposant

$$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}'' + \bar{a}''', \; \bar{b} = \bar{b}' + \bar{b}'' + \bar{b}'''.$$

On a, en vertu de la formule (9),

$$M\,\bar{a}\,\bar{b} = M\,(\bar{a}' + \bar{a}'' + \bar{a}''')\,\bar{b} = M\,\bar{a}'\,\bar{b} + M\,\bar{a}''\,\bar{b} + M\,\bar{a}'''\,\bar{b}.$$

Or

$$M\,\bar{a}'\,\bar{b} = -\,M\,\bar{b}\,\bar{a}' = -\,M\,\bar{b}'\,\bar{a}' - M\,\bar{b}''\,\bar{a}' - M\,\bar{b}'''\,\bar{a}'$$
$$= M\,\bar{a}'\,\bar{b}' + M\,\bar{a}'\,\bar{b}'' + M\,\bar{a}'\,\bar{b}''',$$
$$M\,\bar{a}''\,\bar{b} = M\,\bar{a}''\,\bar{b}' + M\,\bar{a}''\,\bar{b}'' + M\,\bar{a}''\,\bar{b}''', \text{ etc.}$$

Donc

$$M\,(\bar{a}' + \bar{a}'' + \bar{a}''')\,(\bar{b}' + \bar{b}'' + \bar{b}''') = M\,\bar{a}'\,\bar{b}' + \ldots. \quad \text{CQFD.}$$

25. Il est clair que l'égalité géométrique

$$\bar{\mathrm{U}} = \bar{\mathrm{V}}$$

entraîne comme conséquence

$$M\,\bar{\mathrm{U}}\,\bar{a} = M\,\bar{\mathrm{V}}\,\bar{a},$$

$\bar{a}$ désignant un vecteur quelconque.

Soient $\bar{u}$ et $\bar{v}$ deux vecteurs quelconques. *Déduire de $\bar{u}$ le vecteur $M\,\bar{u}\,\bar{v}$, c'est*, par définition, *effectuer sur le vecteur $\bar{u}$ l'opération $M\,\bar{v}$.*

On peut donc effectuer sur les deux membres d'une égalité géométrique l'opération $M\,\bar{a}$.

26. *Projections algébriques d'un moment géométrique sur trois axes de coordonnées rectangulaires.*

Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires et $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ trois vecteurs unitaires dirigés respectivement suivant ces axes. Considérons le moment géométrique

$$\bar{\mu} = M\,\bar{a}\,\bar{b}$$

et soient x, y, z les projections algébriques du vecteur $\bar{a}$ et X, Y, Z celles de $\bar{b}$. On a

$$\bar{a} = x\,\bar{u}_1 + y\,\bar{u}_2 + z\,\bar{u}_3$$
$$\bar{b} = \mathrm{X}\,\bar{u}_1 + \mathrm{Y}\,\bar{u}_2 + \mathrm{Z}\,\bar{u}_3$$

d'où, en appliquant la règle 4° du n° 24,

$$\bar{\mu} = M\,\bar{a}\,\bar{b} = (x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,M\,\bar{u}_1\,\bar{u}_2 + (y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y})\,M\,\bar{u}_2\,\bar{u}_3 + (z\mathrm{X} - x\mathrm{Z})\,M\,\bar{u}_3\bar{u}_1.$$

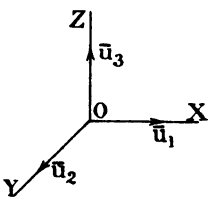


Fig. 7.

Si les axes ont la disposition figurée ci-contre, on a

$$M\,\bar{u}_1\,\bar{u}_2 = \bar{u}_3,$$
$$M\,\bar{u}_2\,\bar{u}_3 = \bar{u}_1,$$
$$M\,\bar{u}_3\,\bar{u}_1 = \bar{u}_2,$$

et la formule précédente devient

$$\bar{\mu} = (x\,\mathrm{Y} - y\,\mathrm{X})\,\bar{u}_3 + (y\,\mathrm{Z} - z\,\mathrm{Y})\,\bar{u}_1 + (z\,\mathrm{X} - x\,\mathrm{Z})\,\bar{u}_2.$$

Les projections algébriques ξ, η, ζ du moment $\bar{\mu}$ sont donc

$$\xi = x\,\mathrm{Y} - y\,\mathrm{X}$$
$$\eta = y\,\mathrm{Z} - z\,\mathrm{Y}$$
$$\zeta = z\,\mathrm{X} - x\,\mathrm{Z}.$$

27. Soit $M\,\bar{b}\,\bar{c}$ un moment géométrique quelconque ; si on le multiplie par un vecteur quelconque $\bar{a}$, on obtiendra une expression numérique $\bar{a}\,M\,\bar{b}\,\bar{c}$ qui est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable.

Soient (x, y, z) les projections algébriques du vecteur $\bar{a}$ sur trois axes rectangulaires, (x', y', z') celles de $\bar{b}$ et (x'', y'', z'') celles de $\bar{c}$.

Les projections algébriques de $M\,\bar{b}\,\bar{c}$ seront

$$y'z'' - y''z',\ z'x'' - x'z'',\ x'y'' - x''y'$$

et l'on aura

$$\bar{a}\,M\,\bar{b}\,\bar{c} = x\,(y'z'' - y''z') + y\,(z'x'' - z''x') + z\,(x'y'' - x''y')$$

ou

$$\bar{a}\,M\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Par conséquent, la valeur absolue de la quantité $\bar{a}\,M\,\bar{b}\,\bar{c}$ est la mesure du volume du parallélipipède construit sur $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ comme côtés.

L'égalité précédente donne lieu à un autre remarque qui nous sera utile plus loin.

La valeur du produit $\bar{a}\,M\,\bar{b}\,\bar{c}$ reste inaltérée si l'on effectue sur les vecteurs $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ une permutation circulaire ; si l'on effectue sur les vecteurs $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ une permutation non circulaire, le produit $\bar{a}\,M\,\bar{b}\,\bar{c}$ change de signe en conservant sa valeur absolue.

VII. Coordonnées vectorielles.

28. Soient O un pôle fixe et M un point quelconque de l'espace. Tirons le vecteur $\overline{OM}$ et posons $\overline{OM} = \bar{e}$. Nous appellerons $\bar{e}$ la *coordonnée géométrique* ou *vectorielle* du point M.

Réciproquement, lorsqu'un vecteur $\bar{e}$ sera donnée arbitrairement dans l'espace, pour obtenir le point qui admet ce vecteur comme coordonnée géométrique, il suffira de faire coïncider le point O avec l'origine du vecteur $\bar{e}$, l'extrémité de ce vecteur sera le point M cherché.

Si l'on transporte l'origine des coordonnées en un point O', de coordonnée $\overline{OO'} = \bar{e}_0$, la nouvelle coordonnée $\bar{e}'$ du point M sera donnée par la formule

$$\bar{e}' = \bar{e} - \bar{e}_0.$$

VIII. Fonctions géométriques.

29. Supposons qu'un vecteur $\bar{e}$ dépende d'une variable analytique t de telle manière qu'à chaque valeur de t correspondent pour $\bar{e}$ une grandeur, une direction et un sens déterminés. Nous dirons

que le vecteur $\bar{e}$ est une fonction géométrique de t, et nous écrirons

$$\bar{e} = \bar{f}(t).$$

Soit M le point qui admet $\bar{e}$ comme coordonnée géométrique ; lorsque t variera de $-\infty$ à $+\infty$, le point M décrira une courbe (I) que nous appellerons l'*indicatrice* de la fonction. Afin d'exprimer la relation qui existe entre la courbe (I) et la fonction $\bar{f}(t)$, nous dirons que

$$\bar{e} = \bar{f}(t)$$

est l'équation de la courbe.

Faisons passer par l'origine O des coordonnées trois axes Ox, Oy, Oz ; soient $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ les projections algébriques sur ces axes du vecteur $\bar{f}(t)$. Les équations analytiques de l'indicatrice seront

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t).$$

Le vecteur $\bar{e}$ peut dépendre de deux variables t et t' ; nous écrirons alors

$$\bar{e} = \bar{f}(t,t').$$

Si l'on donne à t et à t' tous les systèmes possibles de valeurs, le point de coordonnée vectorielle $\bar{e}$ se déplacera sur une surface que nous appellerons encore l'*indicatrice* de la fonction.

Si le vecteur $\bar{e}$ dépendait de plus de deux variables indépendantes, la représentation géométrique deviendrait impossible.

30. Nous allons chercher les indicatrices qui correspondant à quelques formes simples de la fonction géométrique $\bar{f}$.

1° Que représente l'équation

$$\bar{e} = \bar{e}_0 + \bar{u}\,t$$

dans laquelle $\bar{e}_0$ et $\bar{u}$ désignent des vecteurs constants ? On voit aisément que, lorsque t variera de $-\infty$ à $+\infty$, le point $\bar{e}$ décrira la droite menée par le point $\bar{e}_0$ parallèlement au vecteur $\bar{u}$.

Les équations de cette droite, en coordonnées cartésiennes, seront

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t, \\ y &= y_0 + \beta t, \\ z &= z_0 + \gamma t, \end{aligned}$$

x_0, y_0, z_0 désignant les projections du vecteur $\bar{e}_0$ et α, β, γ les projections du vecteur $\bar{u}$ sur les axes des coordonnées.

2° Considérons maintenant l'équation

$$\bar{e} = \bar{a} + \bar{b}\,t + \bar{c}\,t^2,$$

dans laquelle $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ désignent des constantes.

Portons, à partir de l'origine O, le vecteur $\overline{OA} = \bar{a}$, puis, par le point A, menons deux axes Aξ et Aη respectivement parallèles à $\bar{b}$ et à $\bar{c}$. Les coordonnées (ξ, η), par rapport à ces axes, d'un point quelconque de la courbe cherchée seront

$$\xi = bt,$$
$$\eta = ct^2 ;$$

celle-ci est donc une parabole tangente en A à la droite Aξ et dont l'axe est parallèle à Aη.

3° Soit enfin l'équation

$$\bar{e} = \bar{e}_0 + \bar{u}\,t + \bar{u}'\,t' ;$$

elle représente le plan mené, par le point $\bar{e}_0$, parallèlement aux vecteurs $\bar{a}$ et $\bar{a}'$.

IX. Analyse infinitésimale des fonctions géométriques.

31. Soit

$$\bar{e} = \bar{f}(t)$$

une fonction géométrique ; cette fonction est représentée par son indicatrice (I). A une valeur particulière de t correspond, sur l'indicatrice, un point M et l'on a

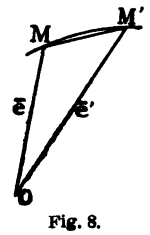


Fig. 8.

$$\overline{OM} = \bar{e} = \bar{f}(t).$$

Donnons à t un accroissement infiniment petit dt ; le point M viendra en M' et le vecteur $\bar{e}$ subira un accroissement $\Delta\bar{e}$ donné par l'égalité

$$\Delta\bar{e} = \overline{MM'} = \bar{f}(t + dt) - \bar{f}(t).$$

$\Delta\bar{e}$ est un *infiniment petit géométrique*.

Lorsque dt tendra vers 0, le rapport $\frac{\Delta\bar{e}}{dt}$ tendra, en général, vers une limite déterminée que nous représenterons par $\bar{f}'(t)$ et à laquelle nous donnerons le nom de *dérivée géométrique* de $\bar{e}$ par rapport à t.

Nous appellerons *différentielle géométrique* de $\bar{e}$ le produit de la dérivée géométrique $\bar{f}'(t)$ par l'accroissement dt de la variable indépendante. Cette différentielle sera représentée par la notation $d\bar{e}$.

Nous aurons donc, par définition,

$$d\bar{e} = \bar{f}'(t).\, dt$$

d'où

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = \bar{f}'(t).$$

Il est à observer que la droite MM' a pour direction limite celle de la tangente en M à l'indicatrice. Par suite, la dérivée $\frac{d\bar{e}}{dt}$ et la différentielle $d\bar{e}$ sont parallèles à la tangente à l'indicatrice au point de coordonnée $\bar{e}$.

32. *Règles de différentiation.* Soient $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$,... différentes fonctions géométriques d'une variable t. Les deux règles suivantes permettront de calculer la dérivée de toutes les expressions qu'on obtiendrait en effectuant sur ces vecteurs quelques unes des opérations définies précédemment.

I. *La dérivée d'une somme géométrique est la somme géométrique des dérivées des termes de la somme.*

Soit la somme

$$\bar{e} = \bar{u} + \bar{v} + \bar{w}.$$

Donnons à t un accroissement dt, nous aurons

$$\Delta\bar{e} = \Delta\bar{u} + \Delta\bar{v} + \Delta\bar{w}$$

d'où, en divisant par dt et passant à la limite,

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{d\bar{v}}{dt} + \frac{d\bar{w}}{dt}.$$

II. *La dérivée de l'une quelconque des expressions* $\bar{u}\,v$, $\bar{u}\,\bar{v}$, $M\,\bar{u}\,\bar{v}$

s'obtient en remplaçant successivement chacun des facteurs par sa dérivée et en faisant la somme des résultats obtenus.

On a, d'après cette règle,

$$\frac{d(\bar{u}\,v)}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt}.\,v + \bar{u}.\,\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d(\bar{u}\,\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt}.\,\bar{v} + \bar{u}.\,\frac{d\bar{v}}{dt},$$

$$\frac{d\,M\bar{u}\,\bar{v}}{dt} = M\frac{d\bar{u}}{dt}.\,\bar{v} + M\bar{u}.\,\frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Démontrons la première de ces formules. A un accroissement dt de la variable indépendante correspond un accroissement $\Delta(\bar{u}\,v)$ de la fonction $\bar{u}\,v$ et l'on a

$$\Delta(\bar{u}\,v) = (\bar{u} + \Delta\bar{u})(v + \Delta v) - \bar{u}\,v$$

ou

$$\Delta(\bar{u}\,v) = \Delta\bar{u}.\,v + \bar{u}.\,\Delta v + \Delta\bar{u}.\,\Delta v.$$

Divisant par dt, puis passant à la limite, on obtiendra l'égalité qu'il fallait démontrer.

Les deux autres formules s'établiraient de la même manière.

La différentielle géométrique étant égale, par définition, au produit de la dérivée géométrique par la différentielle dt, il en résulte que les relations précédentes ont lieu aussi bien entre les différentielles qu'entre les dérivées.

33. Comme application, calculons la dérivée de l'expression

$$a = \bar{w}\,M\bar{u}\,\bar{v}.$$

Posons, pour la simplicité,

$$M\bar{u}\,\bar{v} = \bar{b}\,;$$

nous aurons

$$\frac{da}{dt} = \frac{d\bar{w}}{dt}\,\bar{b} + \bar{w}\,\frac{d\bar{b}}{dt},$$

or,

$$\frac{d\bar{b}}{dt} = M\frac{d\bar{u}}{dt}.\,\bar{v} + M\bar{u}.\,\frac{d\bar{v}}{dt}$$

donc

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} M\bar{u}\,\bar{v} + \bar{\omega} M \frac{d\bar{u}}{dt}\bar{v} + \bar{\omega} M\bar{u}\frac{d\bar{v}}{dt}.$$

34. ***Dérivées et différentielles d'ordre supérieur.*** La dérivée $\overline{f}'(t)$ d'une fonction géométrique $\overline{f}(t)$ est elle-même une fonction géométrique qui admet, en général, une dérivée. On représente cette dernière par $\overline{f}''(t)$ et on l'appelle la ***dérivée seconde*** de $\overline{f}(t)$. La fonction $\overline{f}''(t)$ admet à son tour une dérivée qu'on représente par $\overline{f}'''(t)$ et qu'on appelle la ***dérivée troisième*** de $\overline{f}(t)$, etc. En général, on représente par $\overline{f}^{(n)}(t)$ la dérivée n^e de $\overline{f}(t)$.

On appelle ***différentielles deuxième, troisième,..., n^e*** de $\overline{f}(t)$ les vecteurs $d^2\bar{e}$, $d^3\bar{e}$,..., $d^n\bar{e}$ définis par les égalités

$$\begin{aligned} d^2\bar{e} &= \overline{f}''(t).\,dt^2,\\ d^3\bar{e} &= \overline{f}'''(t).\,dt^3,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ d^n\bar{e} &= \overline{f}^{(n)}(t).\,dt^n. \end{aligned}$$

On tire de là

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{e}}{dt^2} &= \overline{f}''(t),\\ \frac{d^3\bar{e}}{dt^3} &= \overline{f}'''(t),\\ &\cdots\cdots\\ \frac{d^n\bar{e}}{dt^n} &= \overline{f}^{(n)}(t). \end{aligned}$$

35. Soit $\bar{e}$ la coordonnée d'un point quelconque M pris sur l'indicatrice (I) de la fonction $\overline{f}(t)$. Nous avons vu que le vecteur $\frac{d\bar{e}}{dt}$ était parallèle à la tangente en M à l'indicatrice ; nous allons maintenant démontrer que le vecteur $\frac{d^2\bar{e}}{dt^2}$ est parallèle au plan osculateur au point M.

Soit $\bar{u}$ un vecteur unitaire dirigé suivant la tangente en M ; on a

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = v\,\bar{u},$$

v désignant la grandeur du vecteur $\frac{d\bar{e}}{dt}$.

On en déduit, par différentiation,

$$\frac{d^2\bar{e}}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cdot \bar{u} + v \frac{d\bar{u}}{dt}.$$

Le vecteur $\frac{d^2\bar{e}}{dt^2}$ est donc parallèle au plan de $\bar{u}$ et de $\frac{d\bar{u}}{dt}$. Mais, comme il est aisé de le voir, le vecteur $\frac{d\bar{u}}{dt}$ est parallèle à la normale principale au point M ; de là résulte la propriété énoncée.

36. *La projection algébrique de la dérivée (différentielle) d'un vecteur sur un axe quelconque est la dérivée (différentielle) de la projection algébrique de ce vecteur.*

Considérons, dans un de ses états de grandeur, un vecteur variable $\bar{e}$ et soit $\overline{e'}$ un vecteur infiniment peu différent ; on a

$$\Delta\bar{e} = \overline{e'} - \bar{e}$$

d'où, en projetant sur un axe Ox et en désignant d'une manière générale par a_x la projection algébrique d'un vecteur $\bar{a}$,

$$(\Delta\bar{e})_x = e'_x - e_x = \Delta e_x.$$

Divisant par dt et passant à la limite, on trouve

$$\left(\frac{d\bar{e}}{dt}\right)_x = \frac{de_x}{dt}.$$

Le théorème s'étend aux dérivés ou aux différentielles d'ordre quelconque. On a, par exemple,

$$\left(\frac{d^2\bar{e}}{dt^2}\right)_x = \frac{d^2e_x}{dt^2}.$$

En effet,

$$\left(\frac{d^2\bar{e}}{dt^2}\right)_x = \left(\frac{d}{dt}\frac{d\bar{e}}{dt}\right)_x = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{e}}{dt}\right)_x = \frac{d}{dt}\frac{de_x}{dt} = \frac{d^2e_x}{dt^2}.$$

X. Théorie de la ligne droite.

37. Nous avons vu que l'équation de la droite, en coordonnées vectorielles, est de la forme

$$\bar{e} = \bar{e}_0 + \bar{u}\, t,$$

$\bar{e}_0$ et $\bar{u}$ désignant des vecteurs constants, t une variable numérique et $\bar{e}$ la coordonnée courante.

Effectuons sur les deux membres de cette équation l'opération $M\bar{u}$, nous aurons

$$M\,\bar{e}\,\bar{u} = M\,\bar{e}_0\,\bar{u}$$

ou

$$M\,\bar{e}\,\bar{u} = \bar{v}$$

en appelant $\bar{v}$ le vecteur $M\,\bar{e}_0\,\bar{u}$.

Les vecteurs $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sont rectangulaires, car

$$\bar{u}\,\bar{v} = \bar{u}\,M\,\bar{e}_0\,\bar{u} = 0\,.$$

Réciproquement, deux vecteurs rectangulaires $\bar{u}$ et $\bar{v}$ étant donnés, les points dont la coordonnée $\bar{e}$ vérifie l'équation

$$M\,\bar{e}\,\bar{u} = \bar{v} \qquad (10)$$

sont situés sur une droite.

Les vecteurs $\bar{u}$ et $\bar{v}$ déterminent donc une droite et une seule ; aussi appellerons-nous dorénavant ces vecteurs les ***coordonnées vectorielles*** de la droite.

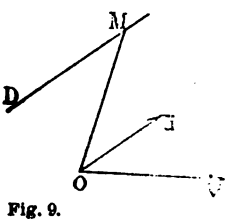


Fig. 9.

La droite de coordonnées $(\bar{u}, \bar{v})$ est parallèle au vecteur $\bar{u}$ et située dans le plan mené par l'origine O perpendiculairement au vecteur $\bar{v}$; sa distance à l'origine est égale à $\frac{v}{u}$.

Il est évident que l'on peut faire varier dans un même rapport les vecteurs $\bar{u}$ et $\bar{v}$ sans changer la position de la droite qui admet ces vecteurs comme coordonnées.

38. Soient α, β, γ les projections du vecteur $\bar{u}$ et p, q, r les projections du vecteur $\bar{v}$ sur trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz.

On a la relation

$$\bar{u}\,\bar{v} = \alpha p + \beta q + \gamma r = 0.$$

Les six quantités α, β, γ, p, q, r sont les ***coordonnées homogènes*** de la droite ; elles ont été définies par Plücker.

En projetant les deux membres de l'équation (10) sur les axes des coordonnées, on obtient les équations cartésiennes de la droite, savoir :

$$\gamma y - \beta z = p,$$
$$\alpha z - \gamma x = q,$$
$$\beta x - \alpha y = r.$$

La distance d de l'origine à la droite $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ est donnée par la formule

$$(11) \qquad d = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

39. Cherchons les modifications que subissent les coordonnées d'une droite lorsque l'origine est déplacée. Soient $(\bar{u}, \bar{v})$ les coordonnées d'une droite par rapport à l'origine O. L'équation de cette droite est

$$M\,\bar{e}\,\bar{u} = \bar{v}\,.$$

Si l'on transporte l'origine O en un point O' de coordonnée $\bar{e}_0$, on aura, en désignant par $\bar{e}'$ la coordonnée courante,

$$\bar{e} = \bar{e}_0 + \bar{e}'$$

et l'équation de la droite deviendra

$$M\,\bar{e}'\,\bar{u} + M\,\bar{e}_0\,\bar{u} = \bar{v}$$

ou

$$(12) \qquad M\,\bar{e}'\,\bar{u} = \bar{v}'$$

pourvu qu'on pose

$$(13) \qquad \bar{v}' = \bar{v} - M\,\bar{e}_0\,\bar{u}\,.$$

La relation (12) montre que l'on peut prendre comme nouvelles coordonnées de la droite les vecteurs $\bar{u}$ et $\bar{v}'$. La formule (13) permet donc de passer des coordonnées anciennes $(\bar{u}, \bar{v})$ aux coordondées nouvelles $(\bar{u}, \bar{v}')$.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ les coordonnées de la droite $(\bar{u}, \bar{v})$ par

rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et $(\alpha, \beta, \gamma, p', q', r')$ les coordonnées de la même droite par rapport à trois axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ menés, par le point O' (x_0, y_0, z_0), parallèlement aux premiers. La formule (13) donne :

$$(14) \qquad \begin{cases} p' = p - \gamma y_0 + \beta z_0, \\ q' = q - \alpha z_0 + \gamma x_0, \\ r' = r - \beta x_0 + \alpha y_0. \end{cases}$$

40. *Distance* d *d'un point* O' (x_0, y_0, z_0) *à une droite* D $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$. Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes, de manière que l'origine des coordonnées coïncide avec le point O'.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma, p', q', r')$ les nouvelles coordonnées de la droite D. On a [formule (11)]

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d^2 = p'^2 + q'^2 + r'^2$$

ou, en tenant compte des égalités (14),

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)d^2 = (p-\gamma y_0+\beta z_0)^2 + (q-\alpha z_0+\gamma x_0)^2 + (r-\beta x_0+\alpha y_0)^2$$

ou encore, tous calculs faits,

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)d^2 = x_0^2(\beta^2+\gamma^2) + y_0^2(\gamma^2+\alpha^2) + z_0^2(\alpha^2+\beta^2)$$
$$- 2\alpha\beta\, x_0y_0 - 2\beta\gamma\, y_0z_0 - 2\gamma\alpha\, z_0x_0$$
$$+ 2x_0(q\gamma - r\beta) + 2y_0(r\alpha - p\gamma) + 2z_0(p\beta - q\alpha).$$

41. ***Moment de deux droites.*** On appelle *moment* de deux droites le produit de leur plus courte distance par le sinus de leur angle (1).

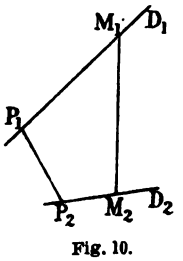


Fig. 10.

Soient D_1 et D_2 deux droites quelconques ; $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ et $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$ leurs coordonnées ; $P_1P_2 = \delta$ leur plus courte distance et θ leur angle. Prenons arbitrairement sur la droite D_1 un point M_1 de coordonnée $\bar{e}_1$ et sur la droite D_2 un point M_2 de coordonnée $\bar{e}_2$. On a

$$\bar{u}_1\bar{v}_2 + \bar{u}_2\bar{v}_1 = \bar{u}_1 M \bar{e}_2\bar{u}_2 + \bar{u}_2 M \bar{e}_1\bar{u}_1 = (\bar{e}_1 - \bar{e}_2) M\bar{u}_1\bar{u}_2 .$$

(1) La notion du moment de deux droites est due à M. Cayley (*Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. XI, II^e Partie, 1868).

Or $\bar{e}_1 - \bar{e}_2 = \overline{M_2M_1}$ et $M\,\bar{u}_1\bar{u}_2$ est un vecteur parallèle à $\overline{P_1P_2}$ et de grandeur $u_1u_2 \sin\theta$; par suite,

$$\pm\,\delta \sin\theta = \frac{\bar{u}_1\bar{v}_2 + \bar{u}_2\bar{v}_1}{u_1u_2},$$

Le moment cherché est donc égal à la valeur absolue de la quantité

$$\frac{\bar{u}_1\bar{v}_2 + \bar{u}_2\bar{v}_1}{u_1u_2}.$$

Dans certaines questions, il sera utile de donner un signe au moment de deux droites ; aussi généraliserons-nous la définition ci-dessus en appelant moment de deux droites la quantité

$$(15) \qquad m = \pm\,\delta \sin\theta = \frac{\bar{u}_1\bar{v}_2 + \bar{u}_2\bar{v}_1}{u_1u_2}.$$

Si les vecteurs $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_2$ sont unitaires, on a

$$(16) \qquad m = \bar{u}_1\bar{v}_2 + \bar{u}_2\bar{v}_1.$$

Soient $(\alpha, \beta_1\ \gamma_1\ p_1\ q_1\ r_1)$ et $(\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ p_2\ q_2\ r_2)$ les coordonnées homogènes des droites D_1 et D_2 ; la formule (15) donne

$$m = \frac{\alpha_1p_2 + \beta_1q_2 + \gamma_1r_2 + \alpha_2p_1 + \beta_2q_1 + \gamma_2r_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}\ \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}.$$

Si les droites D_1 et D_2 se coupent à distance finie ou infinie, on a

$$\bar{u}_1\,\bar{v}_2 + \bar{u}_2\,\bar{v}_1 = 0$$

ou

$$\alpha_1p_2 + \beta_1q_2 + \gamma_1r_2 + \alpha_2p_1 + \beta_2q_1 + \gamma_2r_1 = 0\ .$$

42. *Le moment de deux droites* D_1 *et* D_2 *s'obtient en prenant un point quelconque* O *sur l'une des deux droites,* D_1, *par exemple, et en multipliant la distance* OP *de ce point à* D_2 *par le cosinus de l'angle* α *que* D_1 *fait avec la normale au plan de* O *et de* D_2.

Plaçons en O l'origine ; $\bar{v}_1$ étant nul, la formule (16) donne, pour la valeur du moment, $\bar{u}_1\,\bar{v}_2$ c'est-à-dire OP cos α.

Ce théorème, dont nous ferons un usage fréquent dans la suite, est dû à M. Drach (1).

43. *Deux droites* D_1 *et* D_2 *qui se coupent étant données, trouver les cordonnées d'une droite quelconque passant par leur intersection et située dans le plan qu'elles déterminent.* Soient $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$ et $\bar{u}_2$, $\bar{v}_2$ les coordonnées des droites D_1 et D_2. Par hypothèse,

$$\bar{u}_1\,\bar{v}_1 = 0,\ \bar{u}_2\,\bar{v}_2 = 0,\ \bar{u}_1\,\bar{v}_2 + \bar{u}_2\,\bar{v}_1 = 0.$$

Pour toute droite $(\bar{u}, \bar{v})$ rencontrant les deux premières, on a

$$\begin{aligned}\bar{u}\,\bar{v}_1 + \bar{u}_1\,\bar{v} &= 0,\\ \bar{u}\,\bar{v}_2 + \bar{u}_2\,\bar{v} &= 0.\end{aligned}$$

Multiplions en équation respectivement par a_1 et a_2, puis ajoutons, nous aurons

$$(17)\qquad \bar{u}\,(a_1\,\bar{v}_1 + a_2\,\bar{v}_2) + \bar{v}\,(a_1\,\bar{u}_1 + a_2\,\bar{u}_2) = 0.$$

Or, en vertu des hypothèses faites,

$$(a_1\,\bar{u}_1 + a_2\,\bar{u}_2)\,(a_1\,\bar{v}_1 + a_2\,\bar{v}) = 0.$$

Les vecteurs $a_1\,\bar{u}_1 + a_2\,\bar{u}_2$, $a_1\,\bar{v}_1 + a_2\,\bar{v}_2$, a_1 et a_2 étant arbitraires, peuvent donc être pris pour les coordonnées d'une droite. Cette droite est parallèle au plan de D_1 et de D_2, et l'équation (17) monte qu'elle rencontre toute droite passant par l'intersection de D_1 et de D_2. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\bar{U} &= a_1\,\bar{u}_1 + a_2\,\bar{u}_2\\ \bar{V} &= a_1\,\bar{v}_1 + a_2\,\bar{v}_2\end{aligned}$$

sont les coordonnées d'une quelconque des droites qui satisfont aux conditions énoncées.

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. II, p. 128.

XI. Sur les coordonnées tétraédriques de la droite.

44. Dans certaines questions, il sera avantageux de substituer aux coordonnées α, β, γ, p, q, r, les coordonnées tétraédriques de la droite. La théorie de ces coordonnées est bien connue ; afin de fixer les notations, nous la rappellerons ici brièvement.

Soient, en coordonnées tétraédriques,

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + \theta_1 t = 0,$$
$$\xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z + \theta_2 t = 0,$$

les équations de deux plans qui se coupent suivant une droite quelconque D. Posons :

$$(18)\quad \begin{cases} p_{12} = (\xi_1\,\eta_2)\ ^{(1)}, & p_{13} = (\xi_1\,\zeta_2), & p_{14} = (\xi_1\,\theta_2), \\ p_{34} = (\zeta_1\,\theta_2), & p_{42} = (\theta_1\,\eta_2), & p_{23} = (\eta_1\,\zeta_2). \end{cases}$$

Les équations des plans passant par la droite D et par les sommets du tétraèdre de référence sont

$$(19)\quad \begin{cases} \qquad p_{12}\,y + p_{13}\,z + p_{14}\,t = 0, \\ p_{12}\,x \qquad - p_{23}\,z + p_{42}\,t = 0, \\ p_{13}\,x + p_{23}\,y \qquad - p_{34}\,t = 0, \\ p_{14}\,x - p_{42}\,y + p_{34}\,z \qquad = 0. \end{cases}$$

Les six quantités p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23} sont les coordonnées tétraédriques de la droite. Elles ont entre elles la relation

$$(20)\qquad p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0.$$

C'est ce qu'on voit aisément en développant le déterminant identiquement nul

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \theta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \theta_2 \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \theta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \theta_2 \end{vmatrix}.$$

(1) On a posé, pour simplifier les écritures, $(\xi_1\,\eta_2) = \xi_1\,\eta_2 - \xi_2\,\eta_1$,....

Réciproquement, si l'on a six quantités p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23} vérifiant la relation (20), les quatre plans (19) passent par une même droite.

Soient x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 les coordonnées de deux points de la droite D. On a, en faisant usage de la première des équations (19),

$$p_{12}\,y_1 + p_{13}\,z_1 + p_{14}\,t_1 = 0,$$
$$p_{12}\,y_2 + p_{13}\,z_2 + p_{14}\,t_2 = 0$$

d'où

$$\frac{p_{12}}{(z_1\,t_2)} = \frac{p_{13}}{(t_1\,y_2)} = \frac{p_{14}}{(y_1\,z_2)} = \theta.$$

Les autres équations (19) donneraient

$$\frac{p_{23}}{(x_1\,t_2)} = \frac{p_{42}}{(x_1\,z_2)} = \frac{p_{34}}{(x_1\,y_2)} = \theta.$$

On peut donc écrire

$$(21)\quad \begin{cases} p_{12} = \theta.\,(z_1\,t_2),\ p_{13} = \theta.\,(t_1\,y_2),\ p_{14} = \theta.\,(y_1\,z_2), \\ p_{34} = \theta.\,(x_1\,y_2),\ p_{42} = \theta.\,(x_1\,z_2),\ p_{23} = \theta.\,(x_1\,t_2). \end{cases}$$

En résumé, les tableaux (18) et (21) permettent de calculer les coordonnées tétraédriques d'une droite déterminée soit par deux plans, soit par deux points.

SECTION I.

SUR LE COMPLEXE LINÉAIRE.

I. Étude du complexe linéaire.

1. *Définition du complexe linéaire.* Un complexe linéaire est l'ensemble des droites dont les coordonnées α, β, γ, p, q, r vérifient une relation linéaire et homogène

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + Pp + Qq + Rr = 0$$

dans laquelle A, B, C, P, Q, R sont des constantes.

Désignons par $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ deux vecteurs dont les projections sur les axes des coordonnées soient respectivement A, B, C et P, Q, R.

En appelant, comme dans l'Introduction, $\bar{u}$, $\bar{v}$ les coordonnées vectorielles de la droite, on voit que l'équation précédente peut s'écrire

$$\bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0. \tag{1}$$

C'est de cette équation que nous allons déduire les propriétés du complexe linéaire (1).

(1) L'étude du complexe linéaire a été faite pour la première fois par Plücker. [*On a new Geometrie of Space* (*Philosophical Transactions*, vol. CLV ; 1865) ; ce mémoire a été traduit en français (*Journal de Mathématiques de Liouville*, 1866) ; *Neue Geometrie des Raumes*, 1868]. Il convient toutefois de faire observer que la plupart des théorèmes obtenus par Plücker avaient déjà été énoncés par Chasles, d'abord comme propriétés de l'hyperboloïde réglé (*Journal de Mathématiques de Lionville*, 1839), puis comme propriétés du mouvement infiniment petit d'un corps solide (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1843).

2. *Nouvelle forme que prend l'équation* (1) *lorsque l'on change d'origine.* Si l'on passe de l'origine O à une origine O', de coordonnée vectorielle $\bar{e}_o$, on a, en désignant par $(\bar{u}', \bar{v}')$ les nouvelles coordonnées vectorielles de la droite $(\bar{u}, \bar{v})$,

$$\bar{u}' = \bar{u}, \ \bar{v}' = \bar{v} - M\,\bar{e}_o\,\bar{u}.$$

Par suite, l'équation (1) devient successivement

$$\bar{\lambda}\,\bar{u}' + \bar{\mu}\,\bar{v}' + \bar{\mu}\,M\,\bar{e}_o\,\bar{u}' = 0,$$
$$\bar{\lambda}\,\bar{u}' + \bar{u}'\,M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_o + \bar{\mu}\,\bar{v}' = 0,$$
$$(\bar{\lambda} + M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_o)\,\bar{u}' + \bar{\mu}\,\bar{v}' = 0,$$

ou enfin, en supprimant les accents qui affectent $\bar{u}'$ et $\bar{v}'$,

$$(1)' \qquad \bar{\lambda}'\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0,$$

pourvu que l'on pose

$$(2) \qquad \bar{\lambda}' = \bar{\lambda} + M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_o.$$

Un changement d'origine n'altère donc pas la forme de l'équation (1). On passe de (1) à (1)' au moyen de (2).

3. *Paramètre du complexe linéaire.* La quantité $\frac{\bar{\lambda}\,\bar{\mu}}{\mu^2}$ conserve sa valeur lorsqu'on déplace l'origine ; en effet,

$$\frac{\bar{\lambda}'\,\bar{\mu}}{\mu^2} = \frac{(\bar{\lambda} + M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_o)\,\bar{\mu}}{\mu^2} = \frac{\bar{\lambda}\,\bar{\mu}}{\mu^2}.$$

Il est d'ailleurs évident que cette quantité reste invariable lorsque l'on multiplie par un même nombre les vecteurs $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$. Concluons de là que $\frac{\bar{\lambda}\,\bar{\mu}}{\mu^2}$ est un *invariant métrique* du complexe linéaire. Nous poserons

$$(3) \qquad \frac{\bar{\lambda}\,\bar{\mu}}{\mu^2} = k$$

et nous appellerons k le *paramètre* du complexe.

4. *Axe central du complexe linéaire.* On peut donner à l'équation du complexe une forme remarquable. A cet effet, cherchons s'il

existe une origine $\bar{e}_0$ telle que le vecteur $\bar{\lambda}'$, relatif à cette origine, soit parallèle à $\bar{\mu}$. On aura, ρ désignant une quantité à déterminer,

$$\bar{\lambda}' = \bar{\lambda} + M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_0 = \rho\,\bar{\mu}$$

ou

$$M\,\bar{e}_0\,\bar{\mu} = \bar{\lambda} - \rho\,\bar{\mu}. \tag{4}$$

Un moment géométrique étant perpendiculaire à ses facteurs, il est nécessaire qu'on ait

$$\bar{\mu}\,(\bar{\lambda} - \rho\,\bar{\mu}) = 0$$

d'où

$$\rho = \frac{\bar{\lambda}\,\bar{\mu}}{\mu^2} = k.$$

Cette condition étant remplie, l'équation (4) devient

$$M\,\bar{e}_0\,\bar{\mu} = \bar{\lambda} - k\,\bar{\mu}$$

et elle montre clairement que tous les points de la droite $\bar{u} = \bar{\mu}$, $\bar{v} = \bar{\lambda} - k\,\bar{\mu}$ satisfont à la question et sont les seuls à y satisfaire. On a donné à cette droite le nom d'*axe central* du complexe. Si l'origine est un point quelconque de l'axe central, le vecteur $\bar{\lambda}'$ se réduit à $k\,\bar{\mu}$ et l'équation du complexe devient

$$k\,\bar{\mu}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0. \tag{5}$$

Soient $\bar{u}$, $\bar{v}$ les coordonnées vectorielles de l'axe central et α, β, γ, p, q, r ses coordonnées homogènes. On a

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{u} = \bar{\mu}, \\ \bar{v} = \bar{\lambda} - k\,\bar{\mu} = \bar{\lambda} - \dfrac{\bar{\lambda}\,\bar{\mu}}{\mu^2}\,\bar{\mu}, \end{array}\right. \tag{6}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{llll} \alpha = \mathrm{P}, & \beta = \mathrm{Q}, & \gamma = \mathrm{R}, \\ p = \mathrm{A} - k\,\mathrm{P}, & q = \mathrm{B} - k\,\mathrm{Q}, & r = \mathrm{C} - k\,\mathrm{R}, \end{array}\right. \tag{7}$$

$$k = \frac{\mathrm{AP} + \mathrm{BQ} + \mathrm{CR}}{\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2}. \tag{8}$$

5. De la forme de l'équation (5) résultent les deux conséquences suivantes :

Un complexe linéaire est déterminé quand on en donne l'axe central et le paramètre.

Un complexe linéaire ne cesse pas de coïncider avec lui-même lorsqu'on lui imprime, autour de son axe central, un mouvement hélicoïdal quelconque.

6. *Toutes les droites du complexe, qui passent par un point* P, *sont situées dans un plan, appelé* plan polaire du point.

L'origine étant prise sur l'axe central, l'équation du complexe sera de la forme (5). Soit $\bar{e}_0$ la coordonnée vectorielle du point P. Si l'on transporte en P l'origine des coordonnées, l'équation (5) deviendra

$$(k\,\bar{\mu} + M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_0)\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0.$$

Les droites du complexe passant par le point P ont leur coordonnée $\bar{v}$ nulle, on a donc

$$(k\,\bar{\mu} + M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_0)\,\bar{u} = 0.$$

Cette équation montre que les droites considérées sont situées dans le plan mené, par P, perpendiculairement au vecteur $k\,\bar{\mu} + M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_0$.

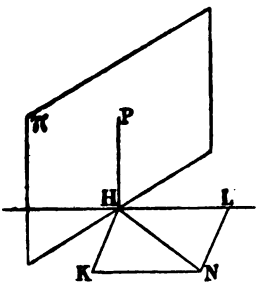


Fig. 11

De là résulte la construction du plan polaire (π) d'un point quelconque P. Abaissons, du point P, la perpendiculaire PH sur l'axe central ; portons, à partir du point H, un vecteur $\overline{HL}$ égal à $k\,\bar{\mu}$; menons, au point H, une perpendiculaire au plan de P et de l'axe central, puis portons sur cette droite, dans le sens du vecteur $M\,\bar{\mu}\,.\,\overline{HP}$, une longueur HK égale à PH. Le vecteur $\overline{HN}$, somme géométrique des vecteurs $\overline{HL} = k\,\bar{\mu}$ et $\overline{HK} = M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_0$, sera perpendiculaire au plan polaire (π) du point P.

Observons que le plan (π) renferme la droite PH ; il résulte, en

effet, de la forme de l'équation (5), que toute droite coupant à angle droit l'axe central appartient au complexe.

7. Réciproquement, *les droites du complexe, situées dans un plan donné, passent toutes par un même point, appelé* pôle du plan.

Soit (π) le plan donné. En effectuant, en sens inverse, la construction du n° précédent, on pourra déterminer un point P dont (π) soit le plan polaire. En transportant au point P l'origine des coordonnées, l'équation (5) du complexe deviendra

$$(9) \qquad (k\,\bar{\mu} + M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_0)\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0.$$

Mais le vecteur $k\,\bar{\mu} + M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_0$ est perpendiculaire au plan (π), puisque (π) est le plan polaire de P (n° 6). Par suite, pour toute droite du complexe, située dans (π), on a

$$(k\,\bar{\mu} + M\,\bar{\mu}\,\bar{e}_0)\,\bar{u} = 0$$

et dès lors, en vertu de (9), $\bar{v} = 0$. CQFD.

Corollaires. I. La distance r à l'axe central du pôle P d'un plan (π) est donnée par la formule

$$(10) \qquad r = k \operatorname{tg} i,$$

i étant l'angle de l'axe central et de la normale au plan (π).

C'est ce qui résulte de la considération du triangle rectangle HLN.

II. Le pôle du plan de l'infini est le point situé à l'infini dans la direction de l'axe central.

8. *Propriété métrique du complexe linéaire.* Plaçons l'origine des coordonnées en un point quelconque de l'axe central ; l'équation du complexe est

$$k\,\bar{\mu}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0.$$

Soient δ la plus courte distance de l'axe central et d'une droite quelconque du complexe, et θ l'angle de ces deux droites. On a, en ne considérant que les valeurs absolues,

$$\bar{\mu}\,\bar{u} = \mu\,u \cos\theta,$$
$$\bar{\mu}\,\bar{v} = \mu\,u\,\delta \sin\theta,$$

donc

$$k \cos\theta = \delta \sin\theta,$$

d'où

$$\delta \operatorname{tg}\theta = k. \tag{11}$$

9. Des propriétés fondamentales des n^{os} 6 et 7, on déduit immédiatement les suivantes :

I. *Si un point* Q *est dans un plan* (P), *son plan polaire* (Q) *passe par le pôle* P *du plan.*

II. *Si un plan* (Q) *passe par un point* P, *son pôle* Q *se trouve dans le plan polaire* (P) *du point* P.

En particulier, tout plan parallèle à l'axe central a son pôle situé à l'infini, et réciproquement.

10. Les propriétés I et II du n° 9 permettent de démontrer bien simplement que :

I. *Si un point* P *décrit une droite* D_1, *son plan polaire* (P) *tourne autour d'une droite fixe* D_2.

II. *Si un plan* (P) *tourne autour d'une droite fixe* D_2, *son pôle* P *décrit une droite* D_1.

En particulier, si un plan (Q) se meut parallèlement à lui-même, son pôle Q décrit une droite parallèle à l'axe central. On a donné à une pareille droite le nom de *diamètre* du complexe.

Si le plan (Q) est perpendiculaire à l'axe central, son pôle Q décrit l'axe central lui-même.

11. *Droites conjuguées.* Les doites D_1 et D_2, qui jouent l'une par rapport à l'autre des rôles absolument identiques, ont reçu le nom de *droites conjugées.*

Toute droite du complexe coïncide avec sa conjuguée, et réciproquement.

Un diamètre a pour conjugée la droite de l'infini commune aux plans parallèles dont les pôles se trouvent sur ce diamètre. En particulier, la conjugée de l'axe central est la droite de l'infini qui lui est perpendiculaire.

12. Des théorèmes I et II du n° 10, il résulte que :

I. *Toute droite qui s'appuie sur deux droites conjuguées* D_1 *et* D_2 *fait partie du complexe linéaire.*

II. *Toute droite du complexe qui s'appuie sur* D_1 *s'appuie aussi sur sa conjuguée* D_2.

13. *La plus courte distance de deux droites conjuguées* D_1 *et* D_2 *coupe l'axe central à angle droit.* Les droites D_1, D_2 et l'axe central sont parallèles à un même plan ; en effet, si l'on mène par D_2 un plan parallèle à D_1, ce plan aura son pôle à l'infini et sera dès lors parallèle à l'axe central (n° 9). Il suit de là que la plus courte distance des droites D_1 et D_2 est perpendiculaire à l'axe central ; en outre, elle appartient au complexe (n° 12) ; elle coupera donc l'axe central à angle droit.

14. Soient D_1 et D_2 deux droites conjuguées. Appelons δ_1, δ_2 les plus courtes distances de ces droites à l'axe central et θ_1, θ_2 les angles qu'elles font avec cet axe. Soit D une droite parallèle à D_1 et s'appuyant sur D_2. Cette droite appartient au complexe, car elle rencontre les deux droites conjuguées D_1 et D_2 (n° 12). Or sa plus courte distance à l'axe central est δ_2 et l'angle qu'elle fait avec cet axe est θ_1. On a donc (n° 8)

$$\delta_2 \operatorname{tg} \theta_1 = k,$$

et de même

$$\delta_1 \operatorname{tg} \theta_2 = k.$$

15. *Détermination de la conjuguée* D_2 *d'une droite donnée* D_1. Soient $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ les coordonnées de la droite D_1 et $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$ les coordonnées de sa conjuguée D_2.

Je dis qu'on pourra écrire :

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_1 + a\bar{\mu} \tag{12}$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + a\bar{\lambda}, \tag{13}$$

a désignant une constante choisie de manière que $\bar{u}_2 \bar{v}_2 = 0$. En effet, à cause de ces formules, l'équation (1) du complexe linéaire devient

$$\bar{u}\,\bar{v}_1 + \bar{u}_1\,\bar{v} = \bar{u}\,\bar{v}_2 + \bar{u}_2\,\bar{v}.$$

et, mise sous cette forme, elle montre clairement que toute droite du complexe qui s'appuie sur D_1 s'appuie également sur D_2 ; les droites $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ et $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$ sont donc conjugées.

Afin de déterminer la quantité a, multiplions membre à membre les formules précédentes ; nous aurons, en observant que $\bar{u}_2\,\bar{v}_2 = 0$,

$$0 = a\,\bar{\lambda}\,\bar{\mu} + \bar{\lambda}\,\bar{u}_1 + \bar{\mu}\,\bar{v}_1$$

d'où

$$(14) \qquad a = -\frac{\bar{\lambda}\,\bar{u}_1 + \bar{\mu}\,\bar{v}_1}{\bar{\lambda}\,\bar{\mu}}.$$

Si le vecteur $\bar{\mu}$ est unitaire, la valeur de a devient

$$(15) \qquad a = -\frac{\bar{\lambda}\,\bar{u}_1 + \bar{\mu}\,\bar{v}_1}{k}.$$

On a de même

$$(16) \qquad a = \frac{\bar{\lambda}\,\bar{u}_2 + \bar{\mu}\,\bar{v}_2}{k}.$$

16. *Moment de deux droites conjuguées.* Multipliant membre à membre les égalités (12) et (13) mises sous la forme

$$\bar{u}_2 - \bar{u}_1 = a\,\bar{\mu}$$
$$\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = a\,\bar{\lambda},$$

nous aurons

$$\bar{u}_1\,\bar{v}_2 + \bar{u}_2\,\bar{v}_1 = -a^2\,k.$$

Or si l'on désigne par m_{12} le moment des droites $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ et $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$, on a (Int., n° 41)

$$\bar{u}_1\,\bar{v}_2 + \bar{u}_2\,\bar{v}_1 = m_{12}u_1\,u_2.$$

Par suite,

$$(17) \qquad m_{12} = -\frac{a^2\,k}{u_1\,u_2}.$$

17. *Soient* $(\bar{u}, \bar{v})$, $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ *deux droites quelconques*, $(\bar{U}, \bar{V})$, $(\bar{U}_1, \bar{V}_1)$ *leurs conjuguées. On a*

$$\bar{u}\,\bar{v}_1 + \bar{u}_1\,\bar{v} = \bar{U}\,\bar{V}_1 + \bar{U}_1\,\bar{V}.$$

Posons

$$\bar{\lambda}\,\bar{U} + \bar{\mu}\,\bar{V} = p, \quad \bar{\lambda}\,\bar{U}_1 + \bar{\mu}\,\bar{V}_1 = p_1.$$

Les égalités (12) et (13), jointes à la formule (16), donnent

$$\bar{u} = \bar{U} - \frac{p\,\bar{\mu}}{k}, \quad \bar{v} = \bar{V} - \frac{p\,\bar{\lambda}}{k},$$

$$\bar{u}_1 = \bar{U}_1 - \frac{p_1\,\bar{\mu}}{k}, \quad \bar{v}_1 = \bar{V}_1 - \frac{p_1\,\bar{\lambda}}{k}.$$

On déduit de là

$$\bar{u}\,\bar{v}_1 = \bar{U}\,\bar{V}_1 + pp_1 - \frac{p_1}{k}\,\bar{\lambda}\,\bar{U} - \frac{p}{k}\,\bar{\mu}\,\bar{V}_1,$$

$$\bar{u}_1\,\bar{v} = \bar{U}_1\,\bar{V} + pp_1 - \frac{p_1}{k}\,\bar{\mu}\,\bar{V} - \frac{p}{k}\,\bar{\lambda}\,\bar{U}_1.$$

Additionnant, on trouve

$$\bar{u}\,\bar{v}_1 + \bar{u}_1\,\bar{v} = \bar{U}\,\bar{V}_1 + \bar{U}_1\,\bar{V} + 2\,pp_1 - \frac{p_1}{k}(\bar{\lambda}\,\bar{U} + \bar{\mu}\,V)$$

$$- \frac{p}{k}(\bar{\lambda}\,\bar{U}_1 + \bar{\mu}\,\bar{V}_1),$$

ou, en observant que les trois derniers termes du second membre se détruisent,

$$\bar{u}\,\bar{v}_1 + \bar{u}_1\,\bar{v} = \bar{U}\,\bar{V}_1 + \bar{U}_1\,\bar{V}.$$

Appelons m_1 le moment des droites $(\bar{u}, \bar{v})$, $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ et M_1 le moment des droites $(\bar{U}, \bar{V})$, $(\bar{U}_1, \bar{V}_1)$. On a, en vertu de l'égalité précédente,

$$m_1\,u\,u_1 = M_1\,U\,U_1.$$

De là cette propriété :

Soient D_1, D_2,... *différentes droites fixes et* m_1, m_2,... *les moments d'une droite quelconque* D *par rapport à ces droites.*

Considérons le complexe C *des droites qui vérifient la relation*

$$\varphi\,(m_1, m_2, \ldots) = 0,$$

φ désignant une fonction homogène des quantités m_1, m_2,... *Le complexe C' des droites conjuguées aux droites de ce complexe aura pour équation*

$$(18) \qquad \varphi\left(M_1 \frac{U}{u_1}, M_2 \frac{U_2}{u_2}, \ldots\right) = 0,$$

les quantités M_1, M_2,... *étant les moments des droites du nouveau complexe par rapport aux conjuguées des droites primitives.*

Si les droites D_1, D_2,... appartiennent au complexe linéaire, on a

$$U_1 = u_1, \; U_2 = u_2, \ldots$$

et l'équation (18) se réduit à

$$\varphi(M_1, M_2, \ldots) = 0 ;$$

par suite, les complexes C et C' coïncident.

18. *Complexe linéaire spécial.* Le complexe linéaire

$$(19) \qquad \bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0$$

est dit *spécial* lorsque son paramètre k est nul. Les coordonnées de l'axe central sont, dans ce cas,

$$\bar{u} = \bar{\mu}, \; \bar{v} = \bar{\lambda}.$$

Comme le montre l'équation (19), toute droite $(\bar{u}, \bar{v})$ du complexe s'appuie sur l'axe central $(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$. Ainsi :

Un complexe linéaire spécial est constitué par l'ensemble des droites qui s'appuient sur une droite fixe.

D'après cela, *le plan polaire d'un point est le plan de ce point et de l'axe central ; le pôle d'un plan est le point où ce plan coupe l'axe central ; la conjuguée d'une droite quelconque de l'espace est l'axe central.*

19. *Moment d'une droite par rapport à un complexe linéaire.*

Soient

$$\bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0$$

l'équation d'un complexe linéaire et $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ les coordonnées d'une

droite quelconque D_1. Nous supposerons unitaires les vecteurs $\bar{\mu}$ et $\bar{u}_1$.

On appelle *moment de la droite* D_1, *par rapport au complexe*, le résultat qu'on obtient en substituant, dans le premier membre de l'équation du complexe, les coordonnées de la droite aux coordonnées courantes. Soit m ce moment, on a

$$m = \bar{\lambda}\,\bar{u}_1 + \bar{\mu}\,\bar{v}_1. \tag{20}$$

Pour justifier cette définition, il faut montrer que la valeur de l'expression

$$\bar{\lambda}\,\bar{u}_1 + \bar{\mu}\,\bar{v}_1$$

est indépendante de la position de l'origine des coordonnées. Soient $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$ les coordonnées de l'axe central du complexe linéaire, on a (n° 4)

$$\bar{u}_0 = \bar{\mu},\ \bar{v}_0 = \bar{\lambda} - k\,\bar{\mu}.$$

L'expression de m devient, par suite,

$$m = (\bar{v}_0 + k\,\bar{\mu})\,\bar{u}_1 + \bar{u}_0\,\bar{v}_1 = \bar{u}_0\,\bar{v}_1 + \bar{u}^1\,\bar{v}_0 + k\,\bar{\mu}\,\bar{u}_1.$$

Or, $\bar{u}_0\,v_1 + \bar{u}_1\,\bar{v}_0$ est le moment de la droite $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ et de l'axe central ; quant à $k\,\bar{\mu}\,\bar{u}_1$, sa valeur est $k \cos(\bar{\mu}_1, \bar{u}_1)$. Le second membre de l'égalité ci-dessus est donc indépendant de l'origine des coordonnées ; nous démontrons ainsi la proposition que nous avions en vue, et, en même temps, nous obtenons une interprétation géométrique de la quantité $\bar{\lambda}\,\bar{u}_1 + \bar{\mu}\,\bar{v}_1$. Soient δ la plus courte distance de la droite $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ à l'axe central et θ l'angle de ces droites ; on a

$$m = \varepsilon\,\delta \sin\theta + k \cos\theta,$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1, suivant les cas.

20. La quantité $\bar{\lambda}\,\bar{u}_1 + \bar{\mu}\,\bar{v}_1$ est susceptible d'une autre interprétation géométrique, qui nous sera utile plus loin :

Le moment d'une droite D_1, *par rapport à un complexe linéaire, est égal au moment de cette droite par rapport à toute parallèle* D *à l'axe central, rencontrant la conjuguée* D_2 *de* D_1.

Soient $(\bar{\mu}, \bar{v})$ les coordonnées de la droite D et $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$ celles de la droite D_2. On a, par hypothèse,

$$\bar{\mu}\,\bar{v} = 0,\ \bar{\mu}\,\bar{v}_2 + \bar{u}_2\,\bar{v} = 0.$$

Substituons, dans cette dernière égalité, les valeurs de $\bar{u}_2$ et de $\bar{v}_2$, tirées des égalités (12) et (13) ; nous aurons, en tenant compte des relations (20) et (15),

$$\bar{\mu}\,\bar{v}_1 + \bar{v}\,\bar{u}_1 = -a\,\bar{\lambda}\,\bar{\mu} = \bar{\lambda}\,\bar{u}_1 + \bar{\mu}\,\bar{v}_1 = m.$$

On conclut de là le théorème ci-dessus.

En se reportant à la proposition du n° 42 de l'Introduction, on peut énoncer ce théorème de la manière suivante :

Le moment d'une droite D_1, *par rapport à un complexe linéaire, est égal au produit de la distance, à cette droite, d'un point quelconque* M *de sa conjugée* D_2, *par le cosinus de l'angle que l'axe central fait avec la normale au plan de* M *et de* D_1.

21. *Moment de deux complexes linéaires* (1). Soient les deux complexes linéaires

$$C_1 = \bar{\lambda}_1\,\bar{u} + \bar{\mu}_1\,\bar{v} = 0,$$
$$C_2 = \bar{\lambda}_2\,\bar{u} + \bar{\mu}_2\,\bar{v} = 0 ;$$

$\bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_2$ sont supposés unitaires.

On appelle *moment des complexes* C_1 et C_2 la quantité

$$M = \bar{\lambda}_1\,\bar{\mu}_2 + \bar{\lambda}_2\,\bar{\mu}_1.$$

Nous justifierons cette définition en montrant que la valeur de M est indépendante de la position de l'origine des coordonnées. Soient $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ et $(\bar{u}_2, \bar{v}_2)$ les coordonnées des axes centraux des complexes C_1 et C_2 ; k_1 et k_2 les paramètres de ces complexes. On a

$$\bar{u}_1 = \bar{\mu}_1, \qquad \bar{v}_1 = \bar{\lambda}_1 - k_1\,\bar{\mu}_1,$$
$$\bar{u}_2 = \bar{\mu}_2, \qquad \bar{v}_2 = \bar{\lambda}_2 - k_2\,\bar{\mu}_2.$$

(1) La notion du moment de deux complexes linéaires est due à M. Klein (*Mathematische Annalen*, t. II, p. 368).

Substituant dans l'expression de M, nous aurons

$$M = (\bar{v}_1 + k_1 \bar{u}_1)\,\bar{u}_2 + (\bar{v}_2 + k_2 \bar{u}_2)\,\bar{u}_1$$

ou

$$M = \bar{v}_1\,\bar{u}_2 + \bar{u}_1\,\bar{v}_2 + (k_1 + k_2)\,\bar{u}_1\,\bar{u}_2.$$

La quantité $\bar{v}_1\,\bar{u}_2 + \bar{u}_1\,\bar{v}_2$ est égale au moment des axes centraux; le produit $\bar{u}_1\,\bar{u}_2$ est égal à $\cos(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. La valeur de M dépend donc uniquement des complexes C_1 et C_2. Soient δ la plus courte distance des axes centraux de ces complexes et θ leur angle ; on a

$$M = \varepsilon\delta \sin\theta + (k_1 + k_2)\cos\theta,$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1.

Lorsque le moment de deux complexes linéaires est nul, ces complexes sont dits en *involution*.

En particulier, le moment de deux complexes linéaires est nul lorsque leurs axes centraux se coupent à angle droit.

22. Si l'on prend les conjuguées de toutes les droites d'un complexe linéatre C_1, par rapport à un complexe linéaire C, on obtiendra un nouveau complexe C_2, qui sera évidemment linéaire. Les complexes C_1 et C_2 ont entre eux des relations très simples que nous allons faire connaître.

Soient

$$\bar{\lambda}\,\bar{u} + \mu\,\bar{v} = 0,$$

$$\bar{\lambda}_1\,\bar{u} + \bar{\mu}_1\,\bar{v} = 0, \tag{21}$$

$$\bar{\lambda}_2\,\bar{u} + \bar{\mu}_2\,\bar{v} = 0, \tag{22}$$

les équations des complexes C, C_1, C_2 ; k, k_1, k_2 les paramètres de ces complexes ; m_1 et m_2 les moments des complexes C_1 et C_2 par rapport au complexe C.

Nous supposerons $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}_1$ unitaires. On a d'abord

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{\lambda}\,\bar{\mu} = k, \\ \bar{\lambda}_1\,\bar{\mu}_1 = k_1, \end{array}\right. \tag{23}$$

$$\bar{\lambda}_1\,\bar{\mu} + \bar{\lambda}\,\bar{\mu}_1 = m_1. \tag{24}$$

Exprimons que les complexes C_1 et C_2 sont conjugués par rap-

port au complexe C. A toute droite $(\bar{u}, \bar{v})$ de C_1, correspond, dans C_2, une droite $(\bar{u}', \bar{v}')$ et l'on a (n° 15)

$$\bar{u} = \bar{u}' - a\,\bar{\mu},$$
$$\bar{v} = \bar{v}' - a\,\bar{\lambda},$$
$$a = \frac{\bar{\lambda}\,\bar{u}' + \bar{\mu}\,\bar{v}'}{k}. \qquad (25)$$

Substituant les valeurs de $\bar{u}$ et de $\bar{v}$ dans (21), nous aurons, en tenant compte des formules (24) et (25),

$$\bar{u}'\,(k\,\bar{\lambda}_1 - m_1\,\bar{\lambda}) + \bar{v}'\,(k\,\bar{\mu}_1 - m_1\,\bar{\mu}) = 0.$$

Comme cette équation doit être identique à l'équation (22), nous poserons

$$\bar{\lambda}_2 = k\,\bar{\lambda}_1 - m_1\,\bar{\lambda}, \qquad (26)$$
$$\bar{\mu}_2 = k\,\bar{\mu}_1 - m_1\,\bar{\mu}. \qquad (27)$$

L'équation (27) montre que les axes centraux A_1, A_2, A des complexes C_1, C_2, C sont parallèles à un même plan. Soit D la droite qui coupe à angle droit les axes A_1 et A. Elle appartient à la fois à C_1 et à C ; appartenant à C_1, sa conjugée fera partie de C_2, mais, appartenant à C, elle coïncide avec sa propre conjuguée. La droite D fait donc partie de C_2, or elle est perpendiculaire à l'axe central A_2 de C_2, elle coupe dès lors cet axe à angle droit. On peut donc énoncer cette propriété :

La droite qui coupe à angles droits les axes centraux des complexes C_1 *et* C_2 *coupe également à angle droit l'axe central du complexe* C.

Evaluons maintenant le paramètre k_2 du complexe C_2. On a successivement, en faisant usage des égalités (26), (27) et (23),

$$\mu^2_2\,k_2 = \bar{\lambda}_2\,\bar{\mu}_2 = (k\,\bar{\lambda}_1 - m_1\,\bar{\lambda})\,(k\,\bar{\mu}_1 - m_1\,\bar{\mu})$$
$$= k^2\,\bar{\lambda}_1\,\bar{\mu}_1 + m^2_1\,\bar{\lambda}\,\bar{\mu} - m_1\,k\,(\bar{\lambda}\,\bar{\mu}_1 + \bar{\lambda}_1\,\bar{\mu}) = k^2\,k_1$$

d'où

$$k_2 = \frac{k^2\,k_1}{\mu^2_2}. \qquad (28)$$

On a, d'autre part, en se reportant à la définition de m_2,

$$\mu_2 m_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{\mu} + \bar{\lambda} \bar{\mu}_2$$

ou, en tenant compte des relations (26), (27) et (23), et après quelques réductions,

$$\mu_2 m_2 = - m_1 k. \tag{29}$$

Substituant, dans l'expression (28) de k_2, la valeur de μ_2, tirée de cette dernière égalité, nous trouverons

$$\frac{k_1}{m_1^2} = \frac{k_2}{m_2^2}.$$

Donc :

Les paramètres des complexes C_1 *et* C_2 *sont entre eux comme les carrés des moments de ces complexes par rapport au complexe* C.

Multiplions membre à membre les égalités (26) et (27), mises sous la forme

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_2 - k \bar{\lambda}_1 &= - m_1 \bar{\lambda} \\ \bar{\mu}_2 - k \bar{\mu}_1 &= - m_1 \bar{\mu} ; \end{aligned}$$

nous aurons, en appelant m_{12} le moment des complexes C_1 et C_2, et en tenant compte de la formule (29) et de la première des formules (23),

$$m_{12} = \frac{m_1 m_2}{k}. \tag{30}$$

Si l'on porte, à partir d'un point O, $\overline{OA}_1$ égal à $k \bar{\mu}_1$ et $\overline{A_1A_2}$ égal à $- m_1 \bar{\mu}$, l'égalité (27) montre que $\overline{OA}_2$ sera égal à $\bar{\mu}_2$, et, comme les vecteurs $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}_1$ sont unitaires, on aura

$$OA_1 = k, \; OA_2 = \mu_2, \; A_1 A_2 = m_1.$$

Soient α_1, α_2 et α_{12} respectivement les angles des droites A, A_1 ; A, A_2 et A_1, A_2. Du triangle $OA_1 A_2$, on déduit

$$\frac{\sin \alpha_1}{\mu_2} = \frac{\sin \alpha_2}{k} = \frac{\sin \alpha_{12}}{m_1}$$

ou, en faisant usage des formules (29) et (30),

$$\frac{\sin \alpha_1}{m_1} = \frac{\sin \alpha_2}{m_2} = \frac{\sin \alpha_{12}}{m_{12}}.$$

Par conséquent :

Les sinus des angles des axes centraux des complexes C, C_1, C_2 *sont entre eux comme les moments mutuels de ces complexes.*

Si le complexe C_1 est spécial, le complexe C_2 le sera également, et l'on retrouvera les propriétés des droites conjugées démontrées aux nos 13 et 14.

II. Sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.

23. Les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire ont été étudiées par MM. Appell (1) et Picard (2). M. Appell a fait voir qu'en un point quelconque d'un telle courbe le plan polaire et le plan osculateur coïncident. M. Picard a donné les équations générales de ces courbes, débarassées de tout signe d'intégration. Nous n'insisterons pas davantage sur les intéressants résultats obtenus par M. Picard, et nous nous contenterons d'exposer quelques propriétés, nouvelles, croyons-nous, des courbes en question. Toutefois nous démontrerons d'abord le théorème de M. Appell, énoncé plus haut.

Soit $\bar{e} = \bar{f}(t)$ l'équation d'une courbe (C) dont les tangentes font partie du complexe linéaire

$$k\,\bar{\mu}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0.$$

Les coordonnées de la tangente en un point quelconque M de cette courbe sont $\frac{d\bar{e}}{dt}$ et $M\,\bar{e}\,\frac{d\bar{e}}{dt}$. On a donc

$$k\,\bar{\mu}\,\frac{d\bar{e}}{dt} + \bar{\mu}\,M\,\bar{e}\,\frac{d\bar{e}}{dt} = 0$$

(1) *Sur les cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide* (*Annales de l'Ecole normale supérieure*, 1876).

(2) *Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches* (*Annale de l'Ecole normale supérieure*, 1877).

ou

$$\frac{d\bar{e}}{dt}(k\bar{\mu} + M\bar{\mu}\bar{e}) = 0. \tag{31}$$

De cette équation, on déduit, en dérivant,

$$\frac{d^2\bar{e}}{dt^2}(k\bar{\mu} + M\bar{\mu}\bar{e}) = 0. \tag{32}$$

Les équations (31) et (32) montrent que le vecteur $k\bar{\mu} + M\bar{\mu}\bar{e}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\frac{d\bar{e}}{dt}$, $\frac{d^2\bar{e}}{dt^2}$, c'est-à-dire (Int, n° 35) au plan osculateur au point M ; mais le vecteur $k\bar{\mu} + M\bar{\mu}\bar{e}$ est normal au plan polaire du point M (n° 6) ; le théorème de M. Appell est donc établi.

24. Ce théorème va nous permettre de déterminer les arêtes du trièdre principal relatif à un point quelconque M de la courbe (C). Par un point O, pris arbitrairement sur l'axe central, menons un plan (π) perpendiculaire à cet axe, puis marquons, sur le même axe, un point S tel que $\overline{OS} = -k\bar{\mu}$. Soit ($C_1$) la projection orthogonale de la courbe (C) sur le plan (π) ; le point M se projettera en M_1. Dans le plan (π), élevons, au point O, une perpendiculaire à OM_1 et portons, sur cette droite, dans le sens du vecteur $M\bar{\mu}\bar{e}_1$ une longueur OM_2 égale à OM_1 ; enfin, tirons SM_2. Le vecteur $\bar{\mu}$ étant supposé unitaire, nous aurons

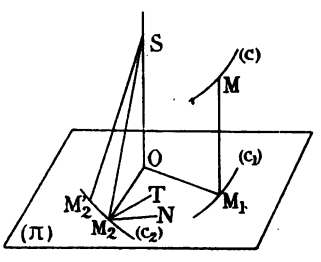


Fig. 12

$$\overline{SM_2} = \overline{SO} + \overline{OM_2} = k\bar{\mu} + M\bar{\mu}\bar{e}.$$

La droite SM_2 est donc parallèle à la binormale à la courbe (C) au point M. De là, cette propriété :

Si l'on fait tourner dans le plan (π), *autour du point* O, *la courbe* (C_1) *de* 90°, *de manière qu'elle occupe la position* (C_2), *le cône* (Γ) *ayant pour base cette nouvelle courbe et pour sommet le point* S *est celui des parallèles aux binormales de la ligne* (C).

On sait que les binormales en deux points infiniment voisins

d'un courbe gauche et la normale principale en l'un de ces points sont parallèles à un même plan ; par suite, la perpendiculaire M_2N à SM_2, menée dans le plan tangent au cône (Γ) suivant SM_2, est parallèle à la normale principale de la courbe (C) au point M. Enfin, la normale MT à ce plan tangent est parallèle à la tangente en M à (C).

25. Soient u, v, w les angles que la direction $\bar{\mu}$ de l'axe central fait avec les arêtes du trièdre principal relatif au point M : tangente, normale principale, binormale. Du point O, abaissons, sur la tangente à (C_2) au point M_2, la perpendiculaire OP, puis menons SP. Posons

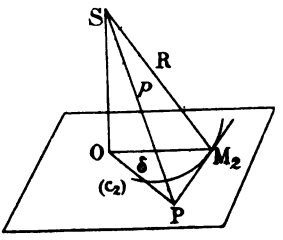


Fig. 13

$$SP = p, \quad OP = \delta, \quad SM_2 = R.$$

On a évidemment

$$(33) \quad \cos u = \frac{\delta}{p}, \quad (34) \cos w = \frac{k}{R}, \quad (35)\, p^2 = \delta^2 + k^2$$

De (33), on déduit, en tenant compte de (35),

$$\sin^2 u = 1 - \frac{\delta^2}{p^2} = \frac{k^2}{p^2}.$$

d'où

$$(36) \qquad \sin u = \frac{k}{p}.$$

Pour calculer sin v, observons que

$$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w = 1 ;$$

on a donc

$$\sin^2 v = 1 - \sin^2 u + \cos^2 w$$

ou, eu égard aux égalités (34) et (36),

$$(37) \qquad \sin^2 v = 1 - \frac{k^2}{p^2} + \frac{k^2}{R^2}.$$

26. *Expression de la torsion en un point* M *d'une courbe* (C) *dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.*

Soient M′ un point de (C) infiniment voisin de M et M'_2 le point qui lui correspond sur (C_2). Posons $M_2SM'_2 = \theta$. Le rayon de torsion τ de la courbe (C) au point M est donné par la formule

$$\tau = \lim \frac{MM'}{\theta}.$$

On a, en égalant deux expressions différentes de l'aire du triangle $SM_2M'_2$,

$$\lim \frac{M_2M'_2}{\theta} = \frac{R^2}{p},$$

puis

$$\lim \frac{M_2M'_2}{MM'} = \sin u = \frac{k}{p},$$

donc

$$\tau = \lim \frac{MM'}{\theta} = \lim \frac{MM'}{M_2M'_2} \cdot \lim \frac{M_2M'_2}{\theta} = \frac{R^2}{k}.$$

Soit r la distance du point M à l'axe central, on a

$$R^2 = k^2 + r^2, \tag{38}$$

donc finalement,

$$\tau = k + \frac{r^2}{k}. \tag{39}$$ (1)

Cette formule exprime que *si l'on prend sur une droite d'un complexe linéaire deux points infiniment voisins* M, M′ *et qu'on appelle* θ *l'angle des plans polaires de ces points, on aura*

$$\lim \frac{MM'}{\theta} = k + \frac{r^2}{k}. \tag{40}$$

(1) Cette relation a été établie par M. Appell (*loc. cit.*) dans le cas des cubiques gauches, mais il est aisé de s'assurer que la méthode employée s'applique sans aucune modification à toutes les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.

Nous allons faire voir que cette propriété se prête à l'étude du paramètre de distribution relatif à une génératrice quelconque d'un hyperboloïde réglé.

27. Prenons sur un hyperboloïde réglé H trois génératrices G, G_1, G_2 appartenant à un même mode de génération. Il existe un seul complexe linéaire C passant par G et admettant G_1 et G_2 comme couple de droites conjuguées. Le plan polaire d'un point quelconque M de G, par rapport à ce complexe, est le plan tangent en ce point à l'hyperboloïde.

Soient O le point central de la génératrice G et φ l'angle des plans tangents en M et en O ; on a

$$OM = p \operatorname{tg} \varphi,$$

p étant le paramètre de distribution des plans tangents. On tire de là, par différentiation,

$$\frac{d\,OM}{d\varphi} = \frac{p}{\cos^2\varphi}.$$

D'autre part, comme le plan tangent en M est précisément le plan polaire de ce point, on a, en vertu de la formule (40),

$$\frac{d\,OM}{d\varphi} = k + \frac{r^2}{k},$$

k désignant le paramètre du complexe C et r la distance du point M à l'axe central A de ce complexe. La comparaison de ces deux formules donne

$$\frac{p}{\cos^2\varphi} = k + \frac{r^2}{k}.$$

Lorsque φ sera nul, c'est-à-dire lorsque le point M coïncidera avec le point central O, la valeur absolue du premier membre de cette égalité atteindra son minimum, et il en sera de même de la variable r. Or le minimum de r est la plus courte distance de la génératrice G et de l'axe central A. Concluons de là que le point central O est le point où la génératrice G est rencontrée par la droite

Δ qui coupe à angles droits les droites G et A. Si l'on désigne par δ la longueur de cette plus courte distance, le paramètre de distribution sera donné par la formule

$$p = \frac{k^2 + \delta^2}{k}.$$

Soit θ l'angle de G et de l'axe central A ; la droite G appartenant au complexe C, on a

$$\delta \operatorname{tg} \theta = k$$

et l'expression de p devient

$$p = \frac{2\,\delta}{\sin 2\theta}.$$

Observons enfin que la droite Δ est dans le plan tangent en O et que l'axe central A coupe à angle droit la plus courte distance Δ_1 des génératrices G_1 et G_2. Réunissant ces différents résultats, nous obtenons ce théorème :

Par le point central O *d'une génératrice quelconque* G *d'un hyperboloïde réglé, on mène, dans le plan tangent en ce point, la perpendiculaire* Δ *à la génératrice. Soient d'autre part* G_1 *et* G_2 *deux génératrices de l'hyperboloïde, appartenant au même mode de génération que* G, *et* A *la droite qui coupe à angles droits la droite* Δ *et la plus courte distance* Δ_1 *des génératrices* G_1 *et* G_2. *Cela posé, le paramètre de distribution de la génératrice* G *est donné par la formule*

$$p = \frac{2\,\delta}{\sin 2\theta},$$

θ *désignant l'angle des droites* G *et* A, *et* δ *leur plus courte distance.*

28. Si l'on fait tendre la génératrice G_2 vers la génératrice G_1, le point où Δ_1 s'appuie sur G_1 sera, à la limite, le point central O_1 de G_1, et la droite Δ_1 sera située dans le plan tangent en O_1. Dans ce cas particulier, le théorème qui précède donne lieu à l'énoncé suivant :

Par les points centraux de deux génératrices G *et* G_1 *de même système d'un hyperboloïde, on mène, dans les plans tangents en ces points,*

les droites Δ *et* Δ_1 *respectivement perpendiculaires aux génératrices* G *et* G_1. *Soit* A *la droite qui coupe à angles droits les droites* Δ *et* Δ_1. *Les paramètres de distribution des génératrices* G *et* G_1 *sont donnés par les formules*

$$p = \frac{2\delta}{\sin 2\theta}, \qquad p_1 = \frac{2\delta_1}{\sin 2\theta_1},$$

θ, θ_1 *désignant les angles que les droites* G *et* G_1 *font avec la droite* A, *et* δ, δ_1 *les plus courtes distances de ces droites à la droite* A.

29. *Relation entre la courbure d'une ligne* (C) *dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire et la courbure de sa projection orthogonale* (C_1) *sur un plan* (π) *perpendiculaire à l'axe central.* Soient ρ le rayon de courbure de la ligne (C) au point M et ρ_1 le rayon de courbure de la ligne (C_1) au point M_1. La projection orthogonale, sur le plan (π), du cercle osculateur à (C), en M, est une ellipse (E) dont le demi grand axe égale ρ et dont le demi petit axe égale $\rho \cos \omega$, c'est à dire [formule (34)] $\frac{\rho k}{R}$. Cette ellipse possède avec la courbe (C_1), au point M_1, un contact du second ordre ; son rayon de courbure, au point M_1, est donc égal à ρ_1. En général, le rayon de courbure ρ_0 en un point d'une conique est donné par la formule

$$\rho_0 = \frac{b'^2}{a' \sin \theta},$$

dans laquelle a' est le demi-diamètre relatif au point considéré, b' le demi-diamètre conjugé et θ l'angle de ces deux demi-diamètres. Au moyen des théorèmes d'Apollonius, on peut écrire, comme il suit, la valeur de ρ_0 :

$$\rho_0 = \frac{b'^3}{a'b' \sin \theta} = \frac{(a^2 + b^2 - a'^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Appliquons cette formule au calcul du rayon de courbure ρ_1 de l'ellipse (E) au point M_1. Nous avons

$$a = \rho, \quad b = \frac{\rho k}{R}, \quad a' = \rho \sin v = \rho \sqrt{1 - \frac{k^2}{p^2} + \frac{k^2}{R^2}},$$

par suite

$$\rho_1 = \frac{\left[\rho^2 + \frac{k^2\rho^2}{R^2} - \rho^2\left(1 - \frac{k^2}{p^2} + \frac{k^2}{R^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{k\rho^2}{R}}$$

ou, après quelques réductions,

$$\rho_1 = \rho\,\frac{k^2 R}{p^2}. \quad (1)$$

En tenant compte des formules (35) et (38), cette expression de ρ_1 devient

$$\rho_1 = \rho\,\frac{k^2\sqrt{r^2 + k^2}}{(\delta^2 + k^2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{41}$$

Nous allons maintenant présenter deux applications de cette formule.

30. Si l'on prend trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, l'axe OZ coïncidant avec l'axe central du complexe linéaire, l'équation

$$k\,\bar{\mu}\,d\bar{e} + \bar{\mu}\,M\,\bar{e}\,d\bar{e} = 0,$$

qui caractérise les courbes (C) dont les tangentes appartiennent au complexe, deviendra

$$k\,dz = y\,dx - x\,dy$$

ou, en coordonnées semi-polaires (r, θ, z),

$$k\,dz = -r^2\,d\theta. \tag{42}$$

Cette relation permet de déterminer celles des courbes (C) qui admettent comme projection, sur le plan XOY, une courbe (C_1) donnée (2).

---

(1) On aurait pu déduire cette égalité d'une formule due à M. Peaucellier. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XX, p. 427).

(2) Si l'on pose $r^2 = \varphi'(\theta)$, $\varphi(0)$ désignant une fonction arbitraire, la relation (42) donnera $k\,z = -\varphi(\theta)$. Ces deux équations définissent la courbe la plus générale dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire.

Prenons pour (C_1) la spirale logarithmique

$$r = e^{m\theta};$$

l'équation (42) donnera, en intégrant,

$$z = -\frac{r^2}{2mk},$$

équation d'un paraboloïde de révolution.

On a, d'autre part, pour la valeur du rayon de courbure ρ_1 de la spirale logarithmique,

$$\rho_1 = \frac{r\,dr}{d\delta} = r\sqrt{1+m^2}.$$

En substituant dans la formule (41), nous obtiendrons le rayon de courbure ρ de la courbe (C). Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

La courbe d'intersection du paraboloïde de révolution

$$z = \frac{r^2}{2p}$$

et du cylindre

$$r = e^{m\theta}$$

appartient par ses tangentes à un complexe linéaire dont l'axe central coïncide avec l'axe du paraboloïde et dont le paramètre égale $-\frac{p}{m}$.

Les rayons de courbure et de torsion ρ *et* τ *de cette courbe sont donnés par les formules*

$$\rho = \frac{\sqrt{1+m^2}}{p^2} \cdot \frac{r\,(m^2\delta^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m^2r^2+p^2}},$$

$$\tau = \frac{m^2r^2+p^2}{mp},$$

δ *désignant la plus courte distance de la tangente à l'axe central.*

31. Proposons-nous de déterminer toutes les courbes (C) appartenant par leurs tangentes à un complexe linéaire et telles que leurs rayons de courbure et de torsion aient entre eux la relation $\rho = f(\tau)$.

Si l'on remplace, dans la formule (41), ρ et ρ_1 par leurs valeurs, savoir

$$\rho = f\left(k + \frac{r^2}{k}\right),$$

$$\rho_1 = \frac{r\,dr}{d\delta},$$

on obtiendra l'équation différentielle

$$\frac{r\,dr}{f\left(k + \frac{r^2}{k}\right)} = \frac{k^2\,d\delta}{(\delta^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}},$$

qui est celle des projections (C_1) des courbes (C) cherchées. En intégrant les deux membres, on trouvera l'expression de δ en fonction de r. Si l'on met à la place de δ sa valeur dans l'équation

$$\delta^2\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] = r^4,$$

une nouvelle quadrature permettra de déterminer les courbes (C_1). Enfin, une dernière intégration donnera les courbes (C) cherchées.

III. Sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe quelconque et, en particulier, d'un complexe tétraédral (1).

32. Les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe quelconque, algébrique ou transcendant, jouissent de la propriété suivante, d'ailleurs bien connue :

(1) Les résultats contenus dans ce paragraphe ont déjà fait, de notre part, l'objet d'une Note insérée aux *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris* (1er Août 1892).

Lorsque les tangentes d'une courbe appartiennent à un complexe de droites, le plan osculateur, en un point de cette courbe, est le point tangent au cône du complexe suivant la tangente à la courbe en ce point.

Ce théorème est susceptible d'une démonstration géométrique des plus simples. Soient A, B, C trois points infiniment voisins de la courbe en question. Les droites AB, BC appartiennent au cône du complexe relatif au point B ; comme elles font entre elles un angle infiniment petit, le plan tangent à ce cône, le long de BC, est le plan ABC ; mais ce dernier oscule la courbe au point B. Le théorème est par suite établi.

En faisant appel à la notion du *complexe linéaire tangent* (1), on peut donner, à l'énoncé de ce théorème, la forme suivante, qui nous sera utile dans un instant :

En un point M *d'une courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe quelconque, le plan osculateur est le plan polaire du point* M *par rapport au complexe linéaire tangent relatif à la tangente en* M *à la courbe.*

---

(1) Soient $f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0$ l'équation d'un complexe quelconque et $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, p_0, q_0, r_0)$ les coordonnées d'une droite quelconque D_0 de ce complexe. Pour les droites du complexe, infiniment voisines de D_0, on a, approximativement

$$0 = f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = f(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, p_0, q_0, r_0)$$
$$+ (\alpha - \alpha_0)\left(\frac{df}{d\alpha}\right)_0 + (\beta - \beta_0)\left(\frac{df}{d\beta}\right)_0 + (\gamma - \gamma_0)\left(\frac{df}{d\gamma}\right)_0$$
$$+ (p - p_0)\left(\frac{df}{dp}\right)_0 + (q - q_0)\left(\frac{df}{dq}\right)_0 + (r - r_0)\left(\frac{df}{dr}\right)_0.$$

Or

$$f(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, p_0, q_0, r_0) = 0,$$

$$\alpha_0\left(\frac{df}{d\alpha}\right)_0 + \beta_0\left(\frac{df}{d\beta}\right)_0 + \gamma_0\left(\frac{df}{d\gamma}\right)_0 + p_0\left(\frac{df}{dp}\right)_0 + q_0\left(\frac{df}{dq}\right)_0 + r_0\left(\frac{df}{dr}\right)_0 = 0,$$

donc

$$\alpha\left(\frac{df}{d\alpha}\right)_0 + \beta\left(\frac{df}{d\beta}\right)_0 + \gamma\left(\frac{df}{d\gamma}\right)_0 + p\left(\frac{df}{dp}\right)_0 + q\left(\frac{df}{dq}\right)_0 + r\left(\frac{df}{dr}\right)_0 = 0.$$

Le complexe linéaire représenté par cette équation a reçu le nom de *complexe linéaire tangent relatif à la droite* D_0. Il jouit d'une propriété importante, conséquence immédiate de sa définition : *Le plan polaire d'un point quelconque* M *de* D_0, *par rapport à ce complexe linéaire, est tangent, suivant* D_0, *au cône du complexe, relatif au point* M.

La notion du complexe linéaire tangent a été introduite dans la Science par Plücker. (*Neue Geometrie ...*, t. II, p. 293.)

33. Cherchons maintenant à évaluer la torsion d'une courbe dont les tangentes font partie d'un complexe quelconque. Soient A, B, C, D quatre points consécutifs d'une telle courbe. Le rayon de torsion τ au point B est donné par la formule

$$\tau = \frac{BC}{\theta},$$

θ désignant l'angle des plans osculateurs consécutifs ABC, BCD. Mais ces plans osculateurs sont les plans polaires des points B et C par rapport au complexe linéaire tangent relatif à la tangente BC. Cette remarque, jointe à la formule (40), nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Si les tangentes d'une courbe font partie d'un complexe quelconque, le rayon de torsion τ, en un point M *de cette courbe, est donné par la formule*

$$\tau = k + \frac{r^2}{k},$$

k *désignant le paramètre du complexe linéaire tangent relatif à la tangente en* M *à la courbe, et* r *la distance du point* M *à l'axe central de ce complexe.*

34. Des théorèmes des nos 32 et 33, on conclut que, si les tangentes d'une courbe font partie d'un complexe quelconque, le plan osculateur et la torsion ne dépendent que du complexe linéaire tangent relatif à la tangente à la courbe au point considéré. Par conséquent :

Si deux courbes, qui se touchent en un point, appartiennent par leurs tangentes à un même complexe, elles ont, en ce point, même plan osculateur et même torsion.

35. Comme application de ce théorème général, nous démontrerons ici une propriété des courbes dont les tangentes font partie d'un complexe tétraédral (1).

---

(1) Un *complexe tétraédral* est l'ensemble des droites qui coupent les faces d'un tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Prenons ce tétraèdre, dit *fondamental*, comme tétraèdre de référence. Soient x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 les coordonnées de deux points quelconques d'une

Un point M *étant pris arbitrairement sur une courbe* (T) *dont les tangentes font partie d'un complexe tétraédral* (K), *considérons la cubique gauche* (C) *tangente en* M *à la courbe* (T) *et passant par les sommets du tétraèdre fondamental du complexe. Cela posé, la courbe* (T) *et la cubique gauche ont, au point* M, *même plan osculateur et même torsion.*

Il est bien connu que, si de quatre points fixes d'une cubique gauche, on projette une tangente quelconque de cette courbe, on obtiendra quatre plans dont le rapport anharmonique est constant ; par conséquent, les tangentes à la cubique gauche (C) font partie d'un complexe tétraédral (K') qui admet même tétraèdre fondamental que le complexe tétraédral (K). Or ces deux complexes ont un

---

droite D du complexe. Les coordonnées de tout point de cette droite seront de la forme

$$x_1 + \lambda x_2,\ y_1 + \lambda y_2,\ z_1 + \lambda z_2,\ t_1 + \lambda t_2.$$

Les valeurs de λ qui correspondent aux points d'intersection X, Y, Z, T de la droite D avec les faces $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ sont données par les égalités

$$\lambda_x = -\frac{x_1}{x_2},\ \lambda_y = -\frac{y_1}{y_2},\ \lambda_z = -\frac{z_1}{z_2},\ \lambda_t = -\frac{t_1}{t_2}.$$

On a évidemment

$$(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_t) = (X\ Y\ Z\ T) = \text{const. } \rho,$$

donc

$$\left(\frac{x_1}{x_2},\ \frac{y_1}{y_2},\ \frac{z_1}{z_2},\ \frac{t_1}{t_2}\right) = \rho$$

ou, en développant,

$$\frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{y_1 z_2 - y_2 z_1} : \frac{x_1 t_2 - x_2 t_1}{y_1 t_2 - y_2 t_1} = \rho$$

ou enfin, en se reportant aux formules (21) de l'Introduction :

$$p_{13}\, p_{42} + \rho\, p_{14}\, p_{23} = 0.$$

Si l'on tient compte de la relation (20) de l'Introduction, on peut mettre l'équation du complexe sous la forme

$$A\, p_{12}\, p_{34} + B\, p_{13}\, p_{42} + C\, p_{14}\, p_{23} = 0,$$

A, B, C désignant des constantes.

En considérant la droite D comme l'intersection de deux plans $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \theta_1)$ et $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \theta_2)$, on trouvera, par un raisonnement analogue à celui qui précède, que le rapport anharmonique des plans passant par la droite D et par les sommets du tétraèdre est égal à ρ, c'est-à-dire au rapport anharmonique des points de rencontre de la droite D avec les faces du tétraèdre.

élément commun : la tangente en M aux courbes (T) et (C), donc ils coïncident. Les courbes (T) et (C) appartenant par leurs tangentes à un même complexe, l'application du théorème du n° 34 donne sur le champ la propriété énoncée.

36. Ce théorème nous amène tout naturellement à rechercher les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe tétraédral.

Soient x, y, z, t et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $t + dt$ les coordonnées de deux points infiniment voisins d'une telle courbe. La droite qui joint ces deux points appartenant au complexe, on a

$$\left(\frac{x + dx}{x}, \frac{y + dy}{y}, \frac{z + dz}{z}, \frac{t + dt}{t}\right) = \rho$$

ou

$$\left(\frac{dx}{x}, \frac{dy}{y}, \frac{dz}{z}, \frac{dt}{t}\right) = \rho$$

ou encore

$$\frac{d\frac{x}{z}}{d\frac{x}{t}} \cdot \frac{d\frac{y}{t}}{d\frac{y}{z}} = \rho.$$

Posons

$$(43) \qquad \begin{cases} x = \xi t, \\ y = \eta t, \\ z = \zeta t, \end{cases}$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{d\frac{\xi}{\zeta}}{d\xi} \cdot \frac{d\eta}{d\frac{\eta}{\zeta}} = \rho$$

ou

$$\frac{\xi}{d\xi} - \rho \frac{\eta}{d\eta} - (1 - \rho) \frac{\zeta}{d\zeta} = 0.$$

Posons maintenant

$$(44) \qquad \xi = e^{\xi_1}, \quad \eta = e^{\eta_1}, \quad \zeta = e^{\zeta_1};$$

nous aurons

$$\frac{1}{d\xi_1} - \frac{\rho}{d\eta_1} - \frac{1-\rho}{d\zeta_1} = 0.$$

Effectuons un dernier changement de variables en posant

$$(45) \quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{\rho}{(1-\rho)^2}\left(X - Y\sqrt{-1} + \dfrac{1-\rho}{\rho} Z\right), \\ \eta_1 = X + Y\sqrt{-1} - \dfrac{\rho}{1-\rho} Z, \\ \zeta_1 = Z; \end{cases}$$

la substitution nous donnera, tous calculs faits,

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Les courbes qui satisfont à cette équation ont reçu le nom de *courbes minima* ; leur détermination se fait fort simplement, et l'on peut mettre sous la forme suivante les expressions des coordonnées d'un point de la courbe minima la plus générale (1) :

$$(46) \quad \begin{cases} X = \dfrac{1-u^2}{2} f''(u) + u f'(u) - f(u), \\ Y = i\dfrac{1+u^2}{2} f''(u) - i u f'(u) + i f(u), \\ Z = u f''(u) - f'(u), \end{cases}$$

$f(u)$ désignant une fonction arbitraire de u. Cela posé, les équations (43), (44), (45) et (46) permettront d'exprimer, en fonction de u et sans signe de quadrature, les coordonnées x, y, z, t d'un point quelconque de toute courbe dont les tangentes appartiennent à un complexe tétraédral.

---

(1) Voir G. DARBOUX *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. I, pp. 341 et 342.

37. Parmi les courbes dont nous venons d'obtenir les équations générales, nous signalerons les *courbes tétraédrales symétriques*. de La Gournerie a donné ce nom aux courbes définies par deux équations de la forme

$$Ax^m + By^m + Cz^m + Dt^m = 0,$$
$$A'x^m + B'y^m + C'z^m + D't^m = 0;$$

le nombre m, qui peut être positif ou négatif, est *l'exposant* de la courbe et le tétraédre de référence, son *tétraèdre de symétrie*.

Cette définition rappelée, démontrons qu'effectivement les tangentes à une courbe tétraédrale symétrique font partie d'un complexe tétraédral. Soient (x', y', z', t') les coordonnées d'un point quelconque de la courbe ; la tangente en ce point a pour équations :

$$Ax\,x'^{m-1} + By\,y'^{m-1} + Cz\,z'^{m-1} + Dt\,t'^{m-1} = 0,$$
$$A'x\,x'^{m-1} + B'y\,y'^{m-1} + C'z\,z'^{m-1} + D't\,t'^{m-1} = 0.$$

Les coordonnées tétraédriques de cette tangente sont dès lors (1)

$$p_{12} = (AB')x'^{m-1}y'^{m-1}, p_{13} = (AC')x'^{m-1}z'^{m-1}, p_{14} = (AD')x'^{m-1}t'^{m-1},$$
$$p_{34} = (CD')z'^{m-1}t'^{m-1}, p_{42} = (DB')t'^{m-1}y'^{m-1}, p_{23} = (BC')y'^{m-1}z'^{m-1}.$$

On tire de là

$$Dp_{12}p_{34} + Ep_{13}p_{42} + Fp_{14}p_{23} = 0,$$

D, E, F désignant des constantes. Cette équation montre que *les tangentes à une courbe tétraédrale symétrique appartiennent à un complexe tétraédral dont le tétraèdre fondamental coïncide avec le tétraèdre de symétrie de la courbe.*

38. Dans son Mémoire *Sur les courbes et les surfaces tétraédrales symétriques*, (2) M. V. Jamet a fait connaître la proposition suivante : *Un point* M *étant pris arbitrairement sur une courbe tétraédrale,*

---

(1) On a posé. pour simplifier l'écriture, $(AB') = AB' - BA'$,....

(2) *Annales scientifiques de l'École normale supérieure ;* 1887.

considérons la cubique gauche tangente en M *à la courbe tétraédrale et passant par les sommets du tétraèdre de symétrie. Cela posé,*

1° *La courbe tétraédrale et la cubique gauche ont, au point* M, *même plan osculateur;*

2° *Lorsque le point* M *se meut sur la courbe tétraédrale, le rapport des courbures, au point* M, *de la cubique gauche et de la courbe tétraédrale demeure constant.*

A cause de la propriété des courbes tétraédrales, établie au n° 37, l'application à ces courbes du théorème du n° 35 est légitime ; elle nous donne une démonstration immédiate de la première partie du théorème de M. Jamet et elle nous permet de compléter ce théorème en disant que :

3° *Au point* M, *la courbe tétraédrale et la cubique gauche ont des torsions égales.*

La seconde partie du théorème de M. Jamet peut être démontrée par des considérations fort simples qu'on trouvera exposées dans une Note de M. G. Fouret insérée au tome XX du *Bulletin de la Société mathématique de France*, page 60.

39. Signalons enfin, parmi les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe tétraédral, celles qui sont définies par les équations

$$x^m y^n z^p t^q = \alpha, \quad x^{m'} y^{n'} z^{p'} t^{q'} = \beta,$$

dans lesquelles

$$m + n + p + q = 0, \quad m' + n' + p' + q' = 0.$$

IV. Sur la congruence des droites communes a deux complexes linéaires.

40. Soient

$$\bar{\lambda}_1 \bar{u} + \bar{\mu}_1 \bar{v} = 0,$$
$$\bar{\lambda}_2 \bar{u} + \bar{\mu}_2 \bar{v} = 0$$

les équations de deux complexes linéaires quelconques C_1 et C_2 ; proposons-nous d'étudier la congruence Γ des droites communes à

ces deux complexes. Par un point de l'espace, il ne passe qu'une droite de la congruence : c'est la droite d'intersection des plans polaires de ce point par rapport aux complexes C_1 et C_2. Un plan pris arbitrairement dans l'espace ne renferme qu'une droite de la congruence : c'est la droite passant par les pôles de ce plan relatifs aux complexes C_1 et C_2.

Toute droite de la congruence Γ appartient au complexe linéaire

$$(47) \qquad (\bar{\lambda}_1 + \rho\,\bar{\lambda}_2)\,\bar{u} + (\bar{\mu}_1 + \rho\,\bar{\mu}_2)\,\bar{v} = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

Le complexe défini par l'équation (47) sera spécial si l'on a

$$(\bar{\lambda}_1 + \rho\,\bar{\lambda}_2)\,(\bar{\mu}_1 + \rho\,\bar{\mu}_2) = 0$$

ou

$$\rho^2\,\bar{\lambda}_2\,\bar{\mu}_2 + \rho\,(\bar{\lambda}_1\,\bar{\mu}_2 + \bar{\lambda}_2\,\bar{\mu}_1) + \bar{\lambda}_1\,\bar{\mu}_1 = 0.$$

Supposons $\bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_2$ unitaires et appelons k_1 et k_2 les paramètres des complexes C_1 et C_2, et m_{12} le moment de ces complexes. L'équation précédente peut s'écrire

$$(48) \qquad k_2\,\rho^2 + m_{12}\,\rho + k_1 = 0.$$

Soient ρ_1 et ρ_2 les racines de cette équation.

Si ρ_1 est différent de ρ_2, toutes les droites de la congruence Γ appartiennent aux deux complexes spéciaux

$$(\bar{\lambda}_1 + \rho_1\,\bar{\lambda}_2)\,\bar{u} + (\bar{\mu}_1 + \rho_1\,\bar{\mu}_2)\,\bar{v} = 0,$$
$$(\bar{\lambda}_1 + \rho_2\,\bar{\lambda}_2)\,\bar{u} + (\bar{\mu}_1 + \rho_2\,\bar{\mu}_2)\,\bar{v} = 0.$$

Par conséquent, *la congruence Γ est formée par l'ensemble des droites qui s'appuient sur les deux droites.*

$$(D_1)\begin{cases} \bar{U}_1 = \bar{\mu}_1 + \rho_1\,\bar{\mu}_2, \\ \bar{V}_1 = \bar{\lambda}_1 + \rho_1\,\bar{\lambda}_2, \end{cases} \qquad (D_2)\begin{cases} \bar{U}_2 = \bar{\mu}_1 + \rho_2\,\bar{\mu}_2, \\ \bar{V}_2 = \bar{\lambda}_1 + \rho_2\,\bar{\lambda}_2, \end{cases}$$

lesquelles ont reçu le nom de *directrices* de la congruence.

On voit aisément que les droites D_1 et D_2 sont conjugées par rapport aux complexes de la série (47) et notamment par rapport aux complexes C_1 et C_2.

Si les racines de l'équation (48) sont égales, les directrices D_1 et D_2 coïncident avec une droite D, laquelle appartient à tous les complexes (47). La congruence Γ est alors constituée par l'ensemble des droites s'appuyant sur D et appartenant à l'un quelconque des complexes (47), au complexe C_1 par exemple. Par suite, les droites de la congruence qui passent par un point quelconque S de D forment un faisceau plan situé dans le plan polaire P de S par rapport au complexe C_1. Si le point S décrit la droite D, le plan P, qui renferme évidemment la droite D, tourne autour de celle-ci, et il existe entre S et P une relation homographique. De là résulte cette définition de la congruence Γ :

La congruence Γ *est engendrée par un faisceau plan dont le sommet* S *décrit une droite* D *tandis que le plan de ce faisceau, qui renferme la droite* D, *tourne autour de cette droite, en correspondant homographiquement à* S.

41. Revenons au cas où les directrices D_1 et D_2 sont distinctes et proposons-nous d'évaluer leur plus courte distance δ. Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites respectivement parallèles aux axes centraux des complexes C_1 et C_2, et s'appuyant, la première, sur D_1, la seconde, sur D_2. Si l'on désigne par M le moment des droites Δ_1 et Δ_2, et par θ l'angle des axes centraux, on aura

$$\delta = \frac{M}{\sin\theta}. \tag{49}$$

Soient $(\bar{\mu}_1, \bar{v}_1)$ les coordonnées de Δ_1 et $(\bar{\mu}_2, \bar{v}_2)$ les coordonnées de Δ_2. On a

$$M = \bar{\mu}_1 \bar{v}_2 + \bar{\mu}_2 \bar{v}_1,$$

puis, par hypothèse,

$$\bar{\mu}_1 (\bar{\lambda}_1 + \rho_1 \bar{\lambda}_2) + \bar{v}_1 (\bar{\mu}_1 + \rho_1 \bar{\mu}_2) = 0,$$
$$\bar{\mu}_2 (\bar{\lambda}_1 + \rho_2 \bar{\lambda}_2) + \bar{v}_2 (\bar{\mu}_1 + \rho_2 \mu_2) = 0.$$

Ajoutant ces deux égalités après avoir multiplié la seconde par ρ_1, on trouve

$$\rho_1 = -\frac{2k_1}{m_{12} + M}.$$

Si l'on remplace dans l'équation

$$k_2 \rho_1^2 + m_{12} \rho_1 + k_1 = 0$$

ρ_1 par sa valeur, on obtiendra, après quelques réductions,

$$M = \pm \sqrt{m_{12}^2 - 4 k_1 k_2}$$

et, en vertu de l'égalité (49),

$$\delta = \frac{\sqrt{m_{12}^2 - 4 k_1 k_2}}{\sin \theta}.$$

Cette formule est due à M. A. Buchheim, qui l'a établie en faisant usage du calcul des quaternions. (Voir *The Messenger of Mathematics*, Vol. XII, p. 129).

V. Sur la surface réglée, lieu des droites communes a trois complexes linéaires.

42. Soient

$$(50) \qquad \begin{cases} C_1 = \bar{\lambda}_1 \bar{u} + \bar{\mu}_1 \bar{v} = 0, \\ C_2 = \bar{\lambda}_2 \bar{u} + \bar{\mu}_2 \bar{v} = 0, \\ C_3 = \bar{\lambda}_3 \bar{u} + \bar{\mu}_3 \bar{v} = 0, \end{cases}$$

les équations des trois complexes donnés ; nous supposerons unitaires les vecteurs $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ et $\bar{\mu}_3$. Si l'on avait

$$\bar{\lambda}_3 = a \bar{\lambda}_1 + b \bar{\lambda}_2,$$
$$\bar{\mu}_3 = a \bar{\mu}_1 + b \bar{\mu}_2,$$

les trois complexes auraient en commun une congruence du premier ordre et de la première classe. Cette hypothèse écartée, observons

que les droites communes aux complexes (50) appartiennent également au complexe linéaire

$$(51)\quad (\rho_1 \bar{\lambda}_1 + \rho_2 \bar{\lambda}_2 + \rho_3 \bar{\lambda}_3)\, \bar{u} + (\rho_1 \bar{\mu}_1 + \rho_2 \bar{\mu}_2 + \rho_3 \bar{\mu}_3)\, \bar{v} = 0,$$

ρ_1, ρ_2 et ρ_3 désignant trois paramètres arbitraires. Le complexe (51) sera spécial si l'on a

$$(\rho_1 \bar{\lambda}_1 + \rho_2 \bar{\lambda}_2 + \rho_3 \bar{\lambda}_3)(\rho_1 \bar{\mu}_1 + \rho_2 \bar{\mu}_2 + \rho_3 \bar{\mu}_3) = 0$$

ou

$$(52)\quad \rho_1^2 k_1 + \rho_2^2 k_2 + \rho_3^2 k_3 + \rho_1 \rho_2 m_{12} + \rho_2 \rho_3 m_{23} + \rho_3 \rho_1 m_{31} = 0,$$

k_1, k_2, k_3 désignant les paramètres des complexes C_1, C_2, C_3 et m_{12}, m_{23}, m_{31} leurs moments mutuels.

Les coordonnées de l'axe central A de ce complexe seront

$$(53)\quad \begin{cases} \bar{U} = \rho_1 \bar{\mu}_1 + \rho_2 \bar{\mu}_2 + \rho_3 \bar{\mu}_3, \\ \bar{V} = \rho_1 \bar{\lambda}_1 + \rho_2 \bar{\lambda}_2 + \rho_3 \bar{\lambda}_3. \end{cases}$$

L'équation (52), interprétée en coordonnées homogènes ρ_1, ρ_2, ρ_3, représente une conique K, et les équations (53) établissent une correspondance entre les points de cette conique et les droites A.

Si la conique K n'est pas dégénérée, à deux points M′ $(\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3)$, M″ $(\rho''_1, \rho''_2, \rho''_3)$ de celle-ci correspondront deux droites A qui ne se couperont pas. Effectivement, si elles se coupaient, on aurait

$$(\rho'_1 \bar{\mu}_1 + \rho'_2 \bar{\mu}_2 + \rho'_3 \bar{\mu}_3)(\rho''_2 \bar{\lambda}_1 + \rho''_2 \bar{\lambda}_2 + \rho''_3 \bar{\lambda}_3) + (\rho'_1 \bar{\lambda}_1 + \rho'_2 \bar{\lambda}_2 + \rho'_3 \bar{\lambda}_3)(\rho''_1 \bar{\mu}_1 + \rho''_2 \bar{\mu}_2 + \rho''_3 \bar{\mu}_3) = 0$$

ou

$$2\rho'_1 \rho''_1 k_1 + 2\rho'_2 \rho''_2 k_2 + 2\rho'_3 \rho''_3 k_3 + (\rho'_1 \rho''_2 + \rho''_1 \rho'_2) m_{12} + (\rho'_2 \rho''_3 + \rho'_3 \rho''_2) m_{23} + (\rho'_3 \rho''_1 + \rho'_1 \rho''_3) m_{31} = 0,$$

or cette égalité est impossible, car si elle avait lieu les points M′ et M″ seraient conjugués par rapport à la conique.

Par suite, à trois points de la conique K correspondront trois droites A qui ne se couperont pas. Comme les droites communes

aux complexes C_1, C_2, C_3 s'appuieront sur ces trois droites, elles engendreront une demi-quadrique, et les axes A engendreront la demi-quadrique complémentaire.

Si la conique K se compose de deux droites distinctes, à chacune de ces droites correspondra un faisceau plan de droites A. Soient P et P' les plans de ces faisceaux, et S et S' leurs centres. Ces deux faisceaux auront une droite commune, celle qui correspond au centre de la conique. Les droites communes aux complexes C_1, C_2, C_3 devant s'appuyer sur chacune des droites qui composent ces deux faisceaux, formeront nécessairement deux faisceaux plans, l'un de plan P et de sommet S', l'autre de plan P' et de sommet S.

Enfin, si la conique K se compose de deux droites coïncidentes, les deux faisceaux précédents se confondront en un seul.

Les considérations qui précèdent reposent sur l'existence de la conique K ; si l'on avait

$$k_1 = k_2 = k_3 = m_{12} = m_{23} = m_{31} = 0,$$

les complexes C_1, C_2, C_3 seraient spéciaux et leurs axes centraux seraient situés dans un même plan P ou bien passeraient par un même point S. Les droites communes aux trois complexes seraient, dans le premier cas, toutes celles du plan P, et, dans le second, toutes celles qui passent par le point S.

43. Proposons-nous de chercher l'équation du complexe des tangentes à l'hyperboloïde H, lieu des droites communes aux complexes C_1, C_2, C_3. A cet effet, déterminons celles des droites A qui rencontrent une droite donnée $(\overline{u}, \overline{v})$. L'équation du problème est

$$\overline{u}\,(\rho_1\,\overline{\lambda}_1 + \rho_2\,\overline{\lambda}_2 + \rho_3\,\overline{\lambda}_3) + \overline{v}\,(\rho_1\,\overline{\mu}_1 + \rho_2\,\overline{\mu}_2 + \rho_3\,\overline{\mu}_3) = 0$$

ou

$$\rho_1\,m_1 + \rho_2\,m_2 + \rho_3\,m_3 = 0, \tag{54}$$

m_1, m_2, m_3 désignant les moments de la droite $(\overline{u}, \overline{v})$ par rapport aux complexes C_1, C_2, C_3. Les droites A cherchées correspondent aux points d'intersection de la droite (54) et de la conique K ; par

suite, la droite $(\overline{u}, \overline{v})$ sera tangente à l'hyperboloïde H lorsque la droite (54) sera tangente à la conique K. L'équation du complexe des tangentes à l'hyperboloïde H est donc

$$\begin{vmatrix} 2k_1 & m_{12} & m_{31} & m_1 \\ m_{12} & 2k_2 & m_{23} & m_2 \\ m_{31} & m_{23} & 2k_3 & m_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation a été indiquée par M. Klein (*Mathematische Annalen*, t. V, p. 284).

44. Prenons sur un hyperboloïde réglé H trois génératrices G_1, G_2, G_3 appartenant à un même mode de génération. Pour trouver l'équation du complexe des tangentes à cet hyperboloïde, il suffira de considérer les droites G_1, G_2, G_3 comme les axes centraux de trois complexes linéaires spéciaux C_1, C_2, C_3. En faisant dans l'équation précédente $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, on obtiendra l'équation cherchée, à savoir

$$(55) \qquad \sqrt{m_{23}\, m_1} \pm \sqrt{m_{31}\, m_2} \pm \sqrt{m_{12}\, m_3} = 0.$$

Cherchons l'équation de la conique du complexe relative à un plan quelconque P.

Soient

M_1, M_2, M_3 les points où les génératrices G_1, G_2, G_3 sont coupées par le plan P ;

D une droite quelconque du complexe, située dans le plan P ;

p_1, p_2, p_3 les distances des points M_1, M_2, M_3 à cette droite, c'est-à-dire les coordonnées tangentielles de D, relativement au triangle $M_1 M_2 M_3$;

α_1, α_2, α_3 les angles que la normale au plan P fait avec les génératrices G_1, G_2, G_3.

Cela posé, on a (Int, n° 42)

$$m_1 = p_1 \cos \alpha_1, \quad m_2 = p_2 \cos \alpha_2, \quad m_3 = p_3 \cos \alpha_3.$$

Substituant dans l'équation (55), on trouve

$$(56) \qquad \sqrt{m_{23}\cos\alpha_1 . p_1} \pm \sqrt{m_{31}\cos\alpha_2 . p_2} \pm \sqrt{m_{12}\cos\alpha_3 . p_3} = 0.$$

C'est l'équation, en coordonnées tangentielles (p_1, p_2, p_3), de la section faite dans l'hyperboloïde H par le plan P.

De la forme de l'équation (56), on peut déduire un certain nombre de propriétés relatives aux sections planes de l'hyperboloïde réglé. Nous n'en donnerons ici qu'un seul exemple.

Supposons que la section faite par le plan P soit une ellipse et plaçons les points M_1, M_2, M_3 en trois des sommets de cette ellipse, les points M_1 et M_3 étant situés aux extrémités d'une même axe. Il est aisé de voir que l'équation de la courbe sera

$$\sqrt{p_1} \pm \sqrt{2p_2} \pm \sqrt{p_3} = 0.$$

Comparant cette équation à l'équation (56), on trouve

$$m_{23}\cos\alpha_1 = m_{12}\cos\alpha_3.$$

Appelons M_4 le quatrième sommet de l'ellipse et menons par ce point une génératrice G_4 appartenant au même mode de génération que les trois premières. La formule ci-dessus, appliquée aux génératrices G_1, G_3, G_4, donne

$$m_{34}\cos\alpha_1 = m_{14}\cos\alpha_3.$$

On déduit de là, par division,

$$\frac{m_{23}}{m_{34}} = \frac{m_{12}}{m_{14}}.$$

Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

Si par les extrémités des deux axes $M_1 M_3$ *et* $M_2 M_4$ *d'une section plane (supposée elliptique) d'un hyperboloïde réglé, on mène quatre génératrices* G_1, G_2, G_3, G_4 *appartenant au même mode de génération, on aura*

$$m_{12} m_{34} = m_{23} m_{14},$$

m_{ik} *désignant le moment des droites* G_i et G_k.

SECTION II.

SUR LES SYSTÈMES DE COMPLEXES LINÉAIRES ASSUJETTIS A PASSER PAR DES DROITES EN NOMBRE INFÉRIEUR A CINQ.

1. Comme l'équation du complexe linéaire, savoir

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + Pp + Qq + Rr = 0,$$

renferme cinq constantes, il en résulte que, généralement, par cinq droites prises arbitrairement dans l'espace, il passe un complexe linéaire et il n'en passe qu'un seul.

Si l'on ne donne que quatre droites, il y a, en général, une infinité *simple* de complexes linéaires qui les renferment : leurs axes centraux sont situés sur une *surface réglée* S.

Par trois droites, il passe, en général, une infinité *double* de complexes linéaires : leurs axes centraux engendrent une *congruence* Γ.

Enfin, il y a une infinité *triple* de complexes linéaires passant par deux droites données : leurs axes centraux constituent un *complexe* C.

Cette Section renferme l'étude de la surface S, de la congruence Γ et du complexe C.

I. Sur la surface réglée, lieu des axes centraux des complexes linéaires passant par quatre droites données.

2. Soient

$$\bar{\lambda}_1 \bar{u} + \bar{\mu}_1 \bar{v} = 0 \quad (1)$$

$$\bar{\lambda}_2 \bar{u} + \bar{\mu}_2 \bar{v} = 0 \quad (2)$$

les équations de deux des complexes linéaires L qui passent par les quatre droites données ; l'équation générale de ces complexes sera

$$\bar{\lambda}_1\,\bar{u} + \bar{\mu}_1\,\bar{v} + \rho\,(\bar{\lambda}_2\,\bar{u} + \bar{\mu}_2\,\bar{v}) = 0$$

ou

$$(3)\qquad (\bar{\lambda}_1 + \rho\,\bar{\lambda}_2)\,\bar{u} + (\bar{\mu}_1 + \rho\,\bar{\mu}_2)\,\bar{v} = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

Nous allons démontrer que, parmi les complexes L, il y en a deux dont les axes centraux se coupent à angle droit (1). Soient

$$(\bar{\lambda}_1 + \rho'\,\bar{\lambda}_2)\,\bar{u} + (\bar{\mu}_1 + \rho'\,\bar{\mu}_2)\,\bar{v} = 0$$
$$(\bar{\lambda}_1 + \rho''\,\bar{\lambda}_2)\,\bar{u} + (\bar{\mu}_1 + \rho''\,\bar{\mu}_2)\,\bar{v} = 0$$

les équations de ces complexes. On a (I, n° 19),

$$(\bar{\mu}_1 + \rho'\,\bar{\mu}_2)\,(\bar{\mu}_1 + \rho''\,\bar{\mu}_2) = 0,$$
$$(\bar{\lambda}_1 + \rho'\,\bar{\lambda}_2)\,(\bar{\mu}_1 + \rho''\,\bar{\mu}_2) + (\bar{\lambda}_1 + \rho''\,\bar{\lambda}_2)\,(\bar{\mu}_1 + \rho'\,\bar{\mu}_2) = 0.$$

Appelons k_1 et k_2 les paramètres des complexes (1) et (2), θ l'angle de leurs axes centraux et m_{12} leur moment. Les équations précédentes peuvent s'écrire, $\bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_2$ étant supposés unitaires,

$$1 + (\rho' + \rho'')\cos\theta + \rho'\,\rho'' = 0,$$
$$2\,k_1 + (\rho' + \rho'')\,m_{12} + 2\,\rho'\,\rho''\,k_2 = 0.$$

Les inconnues ρ' et ρ'' vérifient donc l'équation en ρ

$$\begin{vmatrix} \rho^2 & -\rho & 1 \\ 1 & \cos\theta & 1 \\ 2\,k_1 & m_{12} & 2\,k_2 \end{vmatrix} = 0$$

dont les racines, comme il est aisé de le voir, sont toujours réelles.

Il existe donc toujours, dans la série (3), deux complexes linéaires réels L' et L'' dont les axes centraux se coupent à angle droit.

Plaçons l'origine des coordonnées au point de concours 0 de ces

(1) La marche suivie dans ce numéro est empruntée à un mémoire de M. Buccheim inséré au tome XIII du *Messenger of Mathematics*, p. 120.

axes ; les complexes L′ et L″ auront des équations de la forme

$$(4) \qquad k' \bar{\mu}' \bar{u} + \bar{\mu}' \bar{v} = 0 \ , \ k'' \bar{\mu}'' \bar{u} + \bar{\mu}'' \bar{v} = 0$$

et les complexes L seront représentés par l'équation

$$(k' \bar{\mu}' + \rho k'' \bar{\mu}'') \bar{u} + (\bar{\mu}' + \rho \bar{\mu}'') \bar{v} = 0$$

dans laquelle ρ désigne, comme précédemment, un paramètre arbitraire.

Soient $(\bar{U}, \bar{V})$ les coordonnées de l'axe central d'un complexe quelconque de la série (4), et K le paramètre de ce complexe.

On a [I, formules (7) et (8)]

$$(5) \qquad \begin{aligned} \bar{U} &= \bar{\mu}' + \rho \bar{\mu}'' \\ \bar{V} &= k' \bar{\mu}' + \rho k'' \bar{\mu}'' - K (\bar{\mu}' + \rho \bar{\mu}'') \end{aligned}$$

et

$$K = \frac{k' + \rho^2 k''}{1 + \rho^2}.$$

Substituant cette valeur de K dans l'expression de $\bar{V}$, on trouve

$$(6) \qquad \bar{V} = \frac{\rho}{1 + \rho^2} (k' - k'') (\rho \bar{\mu}' - \bar{\mu}'').$$

Prenons comme axes de coordonnées les axes centraux 0X, 0Y des complexes L′, L″ et la perpendiculaire 0Z au plan X0Y.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ les coordonnées homogènes de l'axe central $(\bar{U}, \bar{V})$. Les formules (5) et (6) donnent

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha = 1, & \beta = \rho, & \gamma = 0, \\ p = \dfrac{\rho^2}{1 + \rho^2} (k' - k''), & q = \dfrac{-\rho}{1 + \rho^2} (k' - k''), & r = 0. \end{cases}$$

En général, les équations d'une droite $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ sont

$$\begin{aligned} \gamma y - \beta z &= p, \\ \alpha z - \gamma x &= q, \\ \beta x - \alpha y &= r ; \end{aligned}$$

dans le cas actuel, elle se réduisent à

$$z = -\frac{p}{\beta} = \frac{q}{\alpha},$$
$$\beta x = \alpha y.$$

La droite $(\overline{U}, \overline{V})$ coupe donc à angle droit l'axe OZ, et la surface S, lieu de la droite $(\overline{U}, \overline{V})$, est un conoïde.

Les équations ci-dessus peuvent s'écrire, en tenant compte des formules du tableau (7),

$$z = -\frac{\rho(k' - k'')}{1 + \rho^2},$$
$$\frac{y}{x} = \rho.$$

Eliminant ρ entre ces deux équations, on trouve

$$z(x^2 + y^2) + xy(k' - k'') = 0.$$

Telle est l'équation de la surface S. M. A. Cayley l'a appelée *cylindroïde*, mais on lui donne généralement le nom de *conoïde de Plücker*. C'est Plücker en effet qui a le premier rencontré cette surface comme solution du problème qui vient d'être résolu (1).

3. Soient D_1 et D_2 les deux droites qui s'appuient sur les quatre droites communes aux complexes L. Plaçons-nous dans le cas où les droites D_1 et D_2 sont réelles ; elles ont avec les axes OX, OY, OZ des relations très simples.

Les droites D_1 et D_2 sont conjugées par rapport à tous les complexes L et notamment par rapport aux complexes L' et L''. Par suite (I, n° 13), l'axe OZ coupe Δ et Δ' à angles droits.

Soient δ_1, δ_2 les distances des droites D_1, D_2 au plan XOY, et θ_1, θ_2 les angles que ces droites font avec l'axe OX. On a (I, n° 14)

---

(1) On trouvera dans la *Géométrie descriptive* de M. Mannheim (p. 435 et suivantes) une étude géométrique du conoïde de Plücker, ainsi que la liste des auteurs qui se sont occupés de cette surface. Nous signalerons en outre deux Notes que nous avons publiées sur ce sujet dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XX, p. 43 et t. XXI, p. 8.

$$\delta_1 \operatorname{tg} \theta_2 = \delta_2 \operatorname{tg} \theta_1,$$
$$\delta_1 \operatorname{ctg} \theta_2 = \delta_2 \operatorname{ctg} \theta_1,$$

d'où, par multiplication,

$$\delta_1 = \delta_2, \ \theta_1 = \theta_2.$$

Le point O se trouve donc à égale distance des droites D_1, D_2, et les projections de ces droites sur le plan XOY sont également inclinées sur les axes OX, OY.

II. Sur la congruence, lieu des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données.

4. Cette congruence a déjà fait l'objet des recherches de MM. Ball (1), Sthal (2) et Waelsch (3).

L'étude qu'on va lire renferme quelques résultats nouveaux, notamment le théorème du n° 7.

Soient D_1, D_2, D_3 les trois droites données et H l'hyperboloïde qu'elles déterminent. Nous appellerons *génératrices du premier système* les génératrices de cet hyperboloïde qui ne coupent pas D_1, D_2, D_3 et *génératrices du second système* celles qui coupent ces droites. Tout complexe linéaire L passant par D_1, D_2, D_3 renferme les génératrices du premier système de l'hyperboloïde H. Pour le démontrer, considérons une droite Δ rencontrant D_1, D_2, D_3 ; sa conjugée Δ', par rapport au complexe L, devra nécessairement rencontrer les mêmes droites ; par suite, toute génératrice du premier système s'appuyant sur les droites conjugées Δ et Δ' appartiendra au complexe.

Cette propriété va nous permettre d'établir simplement l'équation générale des complexes L. Soit

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

---

(1) *Mathematische Annalen*, t. IX, p. 541.
(2) *Journal de Crelle*, t. 91, p. 1.
(3) *Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Vienne, t. XCV, p. 781, 1887.

l'équation de l'hyperboloïde H rapporté à ses axes. Les équations d'une génératrice quelconque du premier système peuvent être mises sous la forme

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\theta + \sin\theta,$$
$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\theta - \cos\theta$$

ou

$$\frac{x - a\sin\theta}{a\cos\theta} = \frac{y + b\cos\theta}{b\sin\theta} = \frac{z}{c},$$

θ désignant un paramètre variable. Cette génératrice passe par le point ($a\sin\theta$, $-b\cos\theta$, 0) et elle a pour coëfficients de direction $a\cos\theta$, $b\sin\theta$, c ; si donc on désigne par $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ ses coordonnées homogènes, on aura (Int, n° 38)

$$\alpha = a\cos\theta\ , \quad \beta = b\sin\theta, \quad \gamma = c,$$
$$p = -bc\cos\theta\ , \quad q = -ac\sin\theta, \quad r = ab.$$

Ces équations montrent que les génératrices du premier système de l'hyperboloïde H appartiennent aux trois complexes linéaires

$$bc\alpha + ap = 0, \quad ac\beta + bq = 0, \quad ab\gamma - cr = 0\ ;$$

par conséquent, les complexes L, qui sont en nombre doublement infini, auront nécessairement une équation de la forme

$$\lambda(bc\alpha + ap) + \mu(ac\beta + bq) + ab\gamma - cr = 0,$$

λ et μ désignant deux paramètres arbitraires.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ les coordonnées de l'axe central d'un complexe L. On a [I, formules (7) et (8)]

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha = \lambda a, & \beta = \mu b, & \gamma = -c, \\ p = \lambda bc - k\lambda a, & q = \mu ac - k\mu b, & r = ab + kc, \end{cases}$$

$$k = \frac{abc(\lambda^2 + \mu^2 - 1)}{\lambda^2 a^2 + \mu^2 b^2 + c^2}.$$

Ainsi se trouvent exprimées en fonction de deux paramètres λ et μ les coordonnées d'une droite quelconque de la congruence que nous allons étudier.

5. Si l'on fait varier λ et μ de manière que $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, k est nul et, en posant, ce qui est permis,

$$\lambda = \cos v, \quad \mu = \sin v,$$

les coordonnées de l'axe central deviennent

$$(10) \qquad \begin{cases} \alpha = a\cos v, & \beta = b\sin v, & \gamma = -c, \\ p = bc\cos v, & q = ac\sin v, & r = ab. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi les génératrices du second système de l'hyperboloïde H ; ces droites, qui appartiennent à la congruence, sont les axes centraux de ceux des complexes L qui sont spéciaux. Ce résultat pouvait être prévu : l'axe central d'un complexe L spécial doit, en effet, s'appuyer sur D_1, D_2, D_3.

6. Cherchons maintenant le lieu des axes centraux des complexes L qui ont même paramètre k. Des équations (9), on tire

$$p = \left(\frac{bc}{a} - k\right)\alpha = l\alpha,$$

$$q = \left(\frac{ac}{b} - k\right)\beta = m\beta,$$

$$r = -\left(\frac{ab}{c} + k\right)\gamma = n\gamma.$$

La forme de ces équations montre que la surface réglée cherchée appartient à trois complexes linéaires, c'est donc une surface du second ordre (Ball, *loc. cit.*). Les équations d'une génératrice de cette surface sont

$$\gamma y - \beta z = p = l\alpha,$$
$$\alpha z - \gamma x = q = m\beta,$$
$$\beta x - \alpha y = r = n\gamma,$$

ou

$$\begin{aligned} l\alpha + z\beta - y\gamma &= 0, \\ z\alpha - m\beta - x\gamma &= 0, \\ y\alpha - x\beta + n\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Eliminant α, β, γ, on trouve

$$\begin{vmatrix} l & z & -y \\ z & -m & -x \\ y & -x & n \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$lx^2 + my^2 + nz^2 + lmn = 0$$

ou encore

$$(11)\quad \frac{x^2}{\left(\frac{ac}{b}-k\right)\left(\frac{ab}{c}+k\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{ab}{c}+k\right)\left(\frac{bc}{a}-k\right)} - \frac{z^2}{\left(\frac{bc}{a}-k\right)\left(\frac{ac}{b}-k\right)} = 1.$$

Posons

$$\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = A,$$

$$\frac{bc}{a} - \frac{ac}{b} = B,$$

$$k = \frac{ac}{b} - u.$$

L'équation (11) devient par suite

$$(12)\quad \frac{x^2}{u(A-u)} + \frac{y^2}{(A-u)(B+u)} - \frac{z^2}{u(B+u)} = 1.$$

La congruence actuelle peut donc être engendrée par les génératrices d'un système de la quadrique (12) lorsque u varie de $-\infty$ à $+\infty$. Pour définir ce système, observons que si $u = \frac{ac}{b}$, k est nul et la quadrique (12) se réduit à l'hyperboloïde (8);

or les génératrices de cet hyperboloïde qui appartiennent à la congruence sont représentées par les équations (10). Concluons de là que les droites de la congruence qui correspondent à une valeur particulière de u sont données par les équations

$$\alpha=\sqrt{u(A-u)}\cos v,\ \beta=\sqrt{(A-u)(B+u)}\sin v,\ \gamma=-\sqrt{u(B+u)}$$
$$p=(B+u)\sqrt{u(A-u)}\cos v,\ q=u\sqrt{(A-u)(B+u)}\sin v,$$
$$r=(A-u)\sqrt{u(B+u)},$$

dans lesquelles v désigne un paramètre variable. En divisant ces six coordonnées par $\sqrt{u(A-u)(B+u)}$, on trouve

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha=\dfrac{\cos v}{\sqrt{B+u}}, & \beta=\dfrac{\sin v}{\sqrt{u}}, & \gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{A-u}}, \\ p=\sqrt{B+u}.\cos v, & q=\sqrt{u}.\sin v, & r=\sqrt{A-u}. \end{cases}$$

7. Entre les coordonnées d'une droite quelconque de la congruence, il existe les relations

$$(14)\qquad q\gamma - r\beta - A\beta\gamma = 0,$$
$$(15)\qquad p\beta - q\alpha - B\alpha\beta = 0,$$
$$(16)\qquad r\alpha - p\gamma + (A+B)\alpha\gamma = 0;$$

on le vérifie immédiatement, soit au moyen des formules (9), soit au moyen des formules (13).

Nous allons maintenant faire usage d'un résultat qui sera établi dans la Note qui termine ce travail.

Nous appellerons *complexe de Painvin* d'une quadrique le complexe des droites par lesquelles on peut mener à cette quadrique deux plans tangents rectangulaires. Si

$$au^2+a'v^2+a''w^2+2bvw+2b'wu+2b''uv+2cu+2c'v+2c''w+d=0$$

est l'équation de cette quadrique en coordonnées tangentielles, l'équation du complexe sera

$$\alpha^2(a'+a'')+\beta^2(a''+a)+\gamma^2(a+a')-2\alpha\beta b''-2\beta\gamma b-2\gamma\alpha b'$$
$$+2(q\gamma-r\beta)c+2(r\alpha-p\gamma)c'+2(p\beta-q\alpha)c''+(p^2+q^2+r^2)d=0.$$

De la forme de cette équation résulte une conséquence immédiate : Si une congruence appartient aux complexes de Painvin de deux quadriques quelconques

$$S(u, v, w) = 0, \quad S'(u, v, w) = 0,$$

elle appartiendra également aux complexes de Painvin de toutes les quadriques représentées par l'équation

$$S(u, v, w) + \rho S'(u, v, w) = 0,$$

ρ désignant un paramètre variable.

Cela posé, observons que les équations (14), (15) et (16) sont celles des complexes de Painvin des quadriques

$$\text{(17)} \qquad A\,vw + u = 0,$$

$$\text{(18)} \qquad B\,uv + w = 0,$$

$$(A + B)\,uw - v = 0.$$

Il résulte de la remarque qui vient d'être faite que la congruence actuelle appartient au complexe de Painvin de la quadrique

$$A\,v\,w + u + \rho\,(B\,u\,v + w) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\text{(19)} \qquad u\,(1 + B\rho v) + w\rho\left(1 + \frac{Av}{\rho}\right) = 0.$$

Profitons de l'indétermination de ρ pour égaler les deux quantités entre parenthèses ; nous aurons

$$B\rho = \frac{A}{\rho}$$

d'où

$$\rho = \varepsilon\sqrt{\frac{A}{B}},$$

ε étant égal à $+1$ ou -1. Si l'on suppose que b est le plus grand des axes réels de l'hyperboloïde H, B sera positif et la valeur de ρ

sera réelle. En tenant compte de cette valeur, l'équation (19) devient

$$\left(1 + vw\sqrt{AB}\right)\left(u + vw\sqrt{\frac{A}{B}}\right) = 0.$$

La congruence actuelle appartient donc aux complexes de Painvin des quadriques

$$(20) \qquad \left(1 + v\sqrt{AB}\right)\left(u + w\sqrt{\frac{A}{B}}\right) = 0,$$

$$(21) \qquad \left(1 - v\sqrt{AB}\right)\left(u - w\sqrt{\frac{A}{B}}\right) = 0.$$

L'équation (20) représente un système de deux points : l'un F_1

$$1 - v\sqrt{AB} = 0$$

est situé sur l'axe des y à une distance $-\sqrt{AB}$ de l'origine ; l'autre F_2

$$u + w\sqrt{\frac{A}{B}} = 0$$

est à l'infini dans la direction d'une droite parallèle au plan des xz et faisant avec l'axe des x un angle ω donné par la formule

$$\operatorname{tg}\omega = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Quant à l'équation (21), elle représente le système de deux points F'_1 et F'_2 définis comme il suit : F'_1 est symétrique de F_1 par rapport à l'origine ; F'_2 est symétrique de F_2 par rapport à l'axe des z.

Appelons *angle sous lequel on voit, d'une droite donnée, un segment donné* l'angle des plans passant par cette droite et par les extrémités du segment. Nous pouvons maintenant donner la définition géométrique suivante de la congruence actuelle :

De toute droite de cette congruence, on voit, sous des angles droits, les segments F_1F_2 *et* $F'_1F'_2$.

8. L'ordre et la classe de la congruence actuelle sont respectivement le nombre des quadriques (12) qui passent par un point

donné et le nombre des quadriques (12) qui sont tangentes à un plan donné.

De la forme de l'équation (12), il résulte que le premier de ces nombres est égal à 3. Donc :

La congruence actuelle est du troisième ordre.

D'autre part, l'équation des quadriques (12) en coordonnées tangentielles (λ, μ, ν) est

$$\lambda^2 u(A-u) + \mu^2 (A-u)(B-u) - \nu^2 u(B+u) = 1.$$

Il y a donc deux quadriques (12) tangentes à un plan donné ; par suite :

La congruence actuelle est de la deuxième classe.

9. La congruence des droites communes aux complexes de Painvin (17) et (18) est du quatrième ordre et de la troisième classe, c'est ce qui résulte du théorème énoncé au n° 11 de la Note qui termine ce travail. Or cette congruence renferme, outre la congruence actuelle, une congruence du premier ordre et de la première classe, celle des droites qui coupent l'axe des y à angle droit. La congruence qui nous occupe étant du troisième ordre et de la deuxième classe, nous pouvons énoncer le théorème suivant : (1)

Jointe à une congruence du premier ordre et de la première classe, la congruence actuelle constitue l'intersection complète des complexes de Painvin relatifs à deux quadriques dégénérées.

10. On sait que les droites d'une congruence sont bitangentes à une surface appelée surface focale de la congruence. Nous allons chercher la surface focale F de la congruence qui nous occupe. Comme les génératrices d'un système de la quadrique (12) font partie de la congruence, cette quadrique est circonscrite à la surface focale; celle-ci est dès lors l'enveloppe de la quadrique (12), u variant de $-\infty$ à $+\infty$. On se fera une idée très nette des particularités que présente la surface focale si l'on effectue la transformation

(1) Nous avons démontré ce théorème dans une Note insérée au tome XXI du *Bulletin de la Société mathématique de France*, page 92.

(22) $$x^2 = X,\ y^2 = Y,\ z^2 = Z.$$

Nous serons alors ramenés à l'étude de l'enveloppe Φ du plan

(23) $$X(B+u) + Yu - Z(A-u) = u(A-u)(B+u).$$

Soit

$$f(X, Y, Z) = 0$$

l'équation de la développable Φ ; l'équation de la surface focale sera

$$f(x^2, y^2, z^2) = 0.$$

11. Portons un instant notre attention sur la transformation définie par les équations (22) ou plutôt sur l'inverse de cette transformation.

A un plan quelconque

$$LX + MY + NZ + P = 0$$

correspond la quadrique

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + P = 0.$$

En particulier, au plan

$$X + Y + Z = 0$$

correspond le cône isotrope

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Au plan de l'infini, correspond le plan de l'infini compté deux fois.

A une droite

$$LX + MY + NZ + P = 0,\quad L'X + M'Y + N'Z + P' = 0$$

correspond la biquadratique gauche de première espèce

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + P = 0,\quad L'x^2 + M'y^2 + N'z^2 + P' = 0$$

A la droite de l'infini du plan

$$LX + MY + NZ + P = 0$$

correspond la courbe d'intersection, comptée deux fois, de la quadrique

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 + P = 0$$

avec le plan de l'infini.

En particulier, à la droite située à l'infini dans le plan

$$X + Y + Z = 0$$

correspond le cercle imaginaire de l'infini, compté deux fois.

Des considérations qui précèdent, il résulte qu'à toutes les surfaces S coupant le plan de l'infini suivant une même courbe C correspondent des surfaces S' tangentes entre elles le long de la courbe C', transformée de C.

En particulier, si une surface S passe par la droite de l'infini du plan

$$X + Y + Z = 0,$$

sa transformée S' sera circonscrite au cône isotrope le long du cercle imaginaire de l'infini.

12. Revenons à la recherche de l'enveloppe Φ du plan (23). La génératrice rectiligne de cette enveloppe s'obtient en adjoignant à l'équation (23) sa dérivée par rapport à u, soit

$$X + Y + Z = f'(u), \tag{24}$$

en posant, pour abréger,

$$u(A - u)(B + u) = f(u).$$

Or, comme on peut s'en assurer, les plans (23) et (24) sont parallèles à la droite dont les coefficients de direction sont

$$-A,\ A + B,\ -B.$$

Leur intersection a donc une direction constante et la développable Φ est un cylindre; ce cylindre est de la troisième classe;

l'équation (23) montre en effet que, par un point de l'espace, il passe trois plans de la famille représentée par cette équation. Afin de déterminer le degré du cylindre Φ cherchons-en l'intersection K avec le plan des XY. Faisant $Z = 0$ dans les équations (23) et (24), on trouve

$$(25) \qquad \begin{aligned} X(B+u) + Y u &= f(u) \\ X \quad\quad + Y \quad\quad &= f'(u) \end{aligned}$$

d'où, tous calculs faites,

$$(26) \quad \begin{cases} B X = u^2 (2u - A + B) \\ B Y = -2u^3 + u^2 (A - 4B) + 2B u (A - B) + AB^2. \end{cases}$$

La courbe K est donc du troisième ordre et, comme elle de la troisième classe, elle possède un point de rebroussement.

Les équations (26) montrent que X et Y ne peuvent devenir infinis que si u devient lui-même infini. La droite de l'infini est donc pour la courbe K une tangente inflexionnelle ; le point d'inflexion est situé à l'infini sur la droite.

$$X + Y = 0.$$

Il suit de là que le cylindre Φ coupe le plan de l'infini suivant une droite triple ; cette droite est située à l'infini dans le plan

$$X + Y + Z = 0.$$

Cherchons maintenant le point de rebroussement de la courbe K. Soit

$$(27) \qquad \xi X + \eta Y + \zeta = 0$$

l'équation d'une tangente quelconque de cette courbe. Evaluons les coordonnées tangentielles ξ, η, ζ de cette droite. En identifiant les équations (25) et (27), on trouve

$$\xi = B + u, \quad \eta = u, \quad \zeta = -f(u).$$

Or si l'on exprime en fonction d'un paramètre u les coordonnées

tangentielles ξ, η, ζ de la tangente à une courbe algébrique, les points de rebroussement de cette courbe vérifient l'équation

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas actuel, cette équation est

$$\begin{vmatrix} B+u & u & -f(u) \\ 1 & 1 & -f'(u) \\ 0 & 0 & -f''(u) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$B f''(u) = 0.$$

On en tire

$$u = \frac{A - B}{3}.$$

Introduisant cette valeur de u dans les équations (26), nous aurons pour les coordonnées x_0, y_0 du point de rebroussement

$$x_0 = -\frac{(A-B)^3}{27\,B},$$

$$y_0 = \frac{(A-B)^3}{27\,B} + \frac{(A-B)^2}{3} + AB.$$

Connaissant l'intersection du cylindre Φ avec le plan des XY, ainsi que la direction des génératrices de ce cylindre, on obtient immédiatement les expressions des coordonnées d'un point quelconque de ce cylindre :

$$(28)\quad \begin{cases} X = \dfrac{u^2(2u-A+B)}{B} - vA \\ Y = \dfrac{-2u^3+u^2(A-4B)+2Bu(A-B)+AB^2}{B} + v(A+B) \\ Z = -vB. \end{cases}$$

Les lignes $u = \text{const.}$ sont les génératrices rectilignes du cylindre

et les courbes $v = \text{const.}$ sont les sections faites dans le cylindre par des plans parallèles au plan des XY, c'est-à-dire des courbes identiques à K.

Les équations de la droite cuspidale du cylindre sont

$$\begin{aligned} X &= x_0 - A\,v, \\ Y &= y_0 + (A + B)\,v, \\ Z &= -B\,v. \end{aligned}$$

Conformément à une remarque faite ci-dessus, pour obtenir les équations de la surface focale, il suffira de remplacer dans les équations (28) X, Y, Z par x^2, y^2, z^2. Nous aurons ainsi

$$x^2 = \frac{u^2(2u - A + B)}{B} - vA,$$

$$y^2 = \frac{-2u^3 + u^2(A - 4B) + 2Bu(A - B) + AB^2}{B} + v(A + B),$$

$$z^2 = -vB.$$

Les courbes $u = \text{const.}$ sont des biquadratiques gauches de première espèce, et les courbes $v = \text{const.}$ des courbes planes du sixième ordre.

La surface focale possède une courbe cuspidale, la biquadratique gauche de première espèce

$$\begin{aligned} x^2 &= x_0 - A\,v, \\ y^2 &= y_0 + (A + B)\,v, \\ z^2 &= -B\,v. \end{aligned}$$

Comme le cylindre Φ est du troisième ordre et qu'on déduit l'équation de la surface focale F de celle du cylindre Φ en remplaçant dans cette dernière X, Y, Z par x^2, y^2, z^2, il en résulte que *la surface focale est du sixième ordre.*

D'après la remarque qui termine le n° 11, la surface F est circonscrite au cône isotrope le long du cercle de l'infini ; de plus elle coupe le plan de l'infini suivant le cercle de l'infini compté trois fois. Concluons de là que *la surface focale admet le cercle imaginaire de l'infini comme ligne double inflexionnelle.*

13. Nous terminerons cette étude en établissant l'équation différentielle des développables de la congruence. On sait que si les coordonnées d'une droite dépendent d'un paramètre variable, la surface engendrée par cette droite sera développable si l'on a

$$d\alpha\, dp + d\beta\, dq + d\gamma\, dr = 0.$$

Nous obtiendrons donc l'équation différentielle cherchée en remplaçant, dans l'égalité ci-dessus, les différentielles $d\alpha$, dp,... par leurs valeurs tirées des équations (13) ; nous aurons, après des calculs fort simples,

$$4\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{\sin^2 v}{u^2} + \frac{\cos^2 v}{(B+u)^2} + \frac{1}{(A-u)^2}.$$

Cette équation va nous donner un théorème sur les courbes de contact de la surface focale avec les développables de la congruence. A cet effet, nous rappellerons d'abord un résultat concernant la théorie des surfaces. Supposons qu'une surface soit rapportée à un système de coordonnées curvilignes (u, v). Soit

$$f(u, v)\, du^2 + g(u, v)\, dv^2 = 0 \qquad (29)$$

l'équation différentielle d'un réseau tracé sur la surface. Par un point quelconque M de celle-ci passent deux courbes de ce réseau ; les tangentes à ces courbes au point M forment un faisceau harmonique avec les tangentes en ce point aux courbes $u =$ const. et $v =$ const. qui y passent. On peut exprimer ce fait en disant que le réseau (29) est *harmoniquement conjugué* au réseau des courbes $u =$ const. et $v =$ const.

Appliquant cette propriété au cas actuel, nous voyons que *le réseau des courbes de contact, avec la surface focale, des surfaces réglées $u =$ const., $v =$ const. est harmoniquement conjugué à celui qui est formé de courbes de contact, avec la surface focale, des développables de la congruence.*

III. Sur le complexe, lieu des axes centraux des complexes linéaires passant par deux droites données.

14. Soient D_1 $(\overline{u}_1, \overline{v}_1)$ et D_2 $(\overline{u}_2, \overline{v}_2)$ les deux droites données et D $(\overline{u}, \overline{v})$ l'axe central de l'un quelconque des complexes linéaires C qui passent par D_1 et D_2. L'équation de ce complexe est

$$\overline{u}\,(k\,\overline{\mathrm{U}} + \overline{\mathrm{V}}) + \overline{v}\,\overline{\mathrm{U}} = 0,$$

k désignant le paramètre du complexe et $(\overline{\mathrm{U}}, \overline{\mathrm{V}})$ les coordonnées courantes.

On a, par hypothèse,

$$(30) \qquad \begin{cases} \overline{u}\,(k\,\overline{u}_1 + \overline{v}_1) + \overline{v}\,\overline{u}_1 = 0, \\ \overline{u}\,(k\,\overline{u}_2 + \overline{v}_2) + \overline{v}\,\overline{u}_2 = 0. \end{cases}$$

Eliminant k, nous obtiendrons l'équation du complexe, à savoir

$$\frac{\overline{u}\overline{u}_1}{\overline{u}\overline{u}_2} = \frac{\overline{u}\overline{v}_1 + \overline{v}\overline{u}_1}{\overline{u}\overline{v}_2 + \overline{v}\overline{u}_2}.$$

Les équations (30) peuvent s'écrire

$$\overline{u}_1\,(k\,\overline{u} + \overline{v}) + \overline{v}_1\,\overline{u} = 0,$$
$$\overline{u}_2\,(k\,\overline{u} + \overline{v}) + \overline{v}_2\,\overline{u} = 0,$$

et, mises sous cette forme, elles montrent clairement que la droite D $(\overline{u}, \overline{v})$ appartient à deux complexes linéaires C_1 et C_2 de même paramètre k et admettant respectivement comme axes centraux les droites D_1 et D_2. Par conséquent, le complexe actuel peut être engendré par la congruence des droites communes aux complexes C_1 et C_2, k variant de $-\infty$ à $+\infty$.

15. *Courbe du complexe relative à un plan quelconque* P.

Soient Q_1, Q_2 les points où le plan P est coupé par les droites D_1,

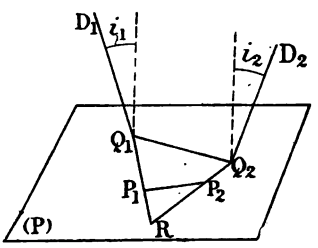


Fig. 14.

D_2 et i_1, i_2 les angles que ces droites font avec la normale au plan P. Appelons P_1 et P_2 les pôles du plan P par rapport aux complexes C_1 et C_2. La droite $P_1 P_2$ appartient au complexe ; la courbe cherchée est donc l'enveloppe de cette droite, k variant de $-\infty$ à $+\infty$. La droite $P_1 Q_1$ est perpendiculaire à D_1, par suite lorsque k variera le point P_1 décrira une droite, et il en sera de même du point P_2. Cela posé, on a

$$P_1 Q_1 = k \operatorname{tg} i_1,$$
$$P_2 Q_2 = k \operatorname{tg} i_2,$$

d'où

$$\frac{P_1 Q_1}{P_2 Q_2} = \frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i_2}. \qquad (31)$$

Les points P_1, P_2 décrivent donc deux ponctuelles semblables, et la droite $P_1 P_2$ enveloppe une parabole II inscrite au triangle $R Q_1 Q_2$.

Si l'on porte, à partir du point R, suivant RQ_1 et RQ_2, deux segments proportionnels à tg i_1 et à tg i_2, la droite qui joindra les extrémités de ces segments sera parallèle à l'axe de la parabole II. C'est ce qu'on peut déduire aisément de la relation (31).

En résumé, la parabole II, conique du complexe relative au plan P, est entièrement déterminée par les trois tangentes $R Q_1$, RQ_2, $Q_1 Q_2$ et par la direction de son axe.

16. *Cône* (S) *du complexe relatif à un point quelconque* S.

Lorsque k est nul, les complexes C_1 et C_2 sont spéciaux ; par suite, une première génératrice du cône (S) est la droite issue de S et s'appuyant sur D_1 et D_2. Les perpendiculaires SH_1 et SH_2 abaissées du point S sur les droites D_1 et D_2 appartiennent également au cône (S). Cherchons les plans X_1 et X_2 tangents au cône (S) le long de ces génératrices. Soient i_1, i_2 les angles que la normale au plan $SH_1 H_2$ fait avec les droites D_1, D_2 et x_1, x_2 les angles que les normales aux plans X_1, X_2 font respectivement avec D_1, D_2.

Soient, pour une valeur quelconque de k, K_1 et K_2 les plans

polaires du point S par rapport aux complexes C_1 et C_2, ces plans passent respectivement par les droites SH_1, SH_2 et se coupent suivant une génératrice G du cône (S). Le paramètre k variant, la droite G engendrera ce cône. Il est clair que lorsque le plan K_1 coïncidera avec le plan $SH_1 H_2$, le plan K_2 coïncidera avec le plan X_2. En désignant par k_1 la valeur que prendra k dans cette hypothèse, on aura

$$SH_1 = k_1 \operatorname{tg} i_1,$$
$$SH_2 = k_1 \operatorname{tg} x_2,$$

d'où

$$\operatorname{tg} x_2 = \frac{SH_2}{SH_1} \operatorname{tg} i_1.$$

On aurait de même

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{SH_1}{SH_2} \operatorname{tg} i_2.$$

Le cône du complexe est donc déterminé par trois génératrices et par les plans tangents le long de deux de ces génératrices.

17. *Définition géométrique de la surface des singularités du complexe.* Conservons toutes les notations du n° 15. Soit P un plan tel que l'on ait

$$\frac{RQ_1}{RQ_2} = \frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i_2}.$$

Dans ce cas, la droite $P_1 P_2$ se déplacera parallèlement à elle-même et la conique du complexe, relative au plan P, dégénérera en un système de deux points : le point R et le point à l'infini sur $Q_1 Q_2$. Le lieu du point R étant la surface des singularités du complexe, on peut énoncer cette propriété :

Si d'un point quelconque R *de la surface des singularités, on abaisse, sur les droites* D_1 *et* D_2, *les perpendiculaires* RQ_1 *et* RQ_2, *on aura*

$$\frac{RQ_1}{RQ_2} = \frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i_2}.$$

i_1 et i_2 *désignant les angles que la normale au plan* RQ_1Q_2 *fait respectivement avec les droites* D_1 *et* D_2.

18. Nous avons vu que le complexe actuel peut-être engendré par la congruence Γ des droites communes aux complexes C_1 et C_2, k variant de $-\infty$ à $+\infty$. Les directrices Δ et Δ′ de la congruence Γ appartiennent à la surface des singularités du complexe : en effet, le cône du complexe, relatif à un point quelconque S de l'une de ces droites, se décompose en un système de deux plans ; l'un de ces plans est celui qui passe par S et par celles des directrices Δ, Δ′ qui ne contient pas S.

Lorsque k variera, les droites Δ, Δ′ se déplaceront en engendrant la surface des singularités cherchée.

En général, les directrices de la congruence

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} &= 0, \\ \bar{\lambda}'\,\bar{u} + \bar{\mu}'\,\bar{v} &= 0, \end{aligned}$$

sont données par les formules

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \bar{\mu} + \rho_1\,\bar{\mu}', \quad \bar{U}_2 = \bar{\mu} + \rho_2\,\bar{\mu}', \\ \bar{V}_1 &= \bar{\lambda} + \rho_1\,\bar{\lambda}', \quad \bar{V}_2 = \bar{\lambda} + \rho_2\,\bar{\lambda}', \end{aligned}$$

dans lesquelles ρ_1 et ρ_2 sont les racines de l'équation

$$\rho^2\,\bar{\lambda}\,\bar{\mu} + \rho\,(\bar{\lambda}\,\bar{\mu}' + \bar{\lambda}'\,\bar{\mu}) + \bar{\lambda}'\,\bar{\mu}' = 0.$$

Dans le cas actuel,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \bar{v}_1 + k\,\bar{u}_1, & \bar{\lambda}' &= \bar{v}_2 + k\,\bar{u}_2, \\ \bar{\mu} &= \bar{u}_1, & \bar{\mu}' &= \bar{u}_2 ; \end{aligned}$$

par suite, en supposant unitaires les vecteurs $\bar{u}_1$ et $\bar{u}_2$,

$$\bar{\lambda}\,\bar{\mu} = k, \quad \bar{\lambda}'\,\bar{\mu}' = k, \quad \bar{\lambda}\,\bar{\mu}' + \bar{\lambda}'\,\bar{\mu} = 2\,k\cos\varphi + m,$$

φ désignant l'angle des droites D_1, D_2, et m leur moment.

On a donc pour les coordonnées $(\bar{u}, \bar{v})$ d'une droite quelconque de la surface des singularités :

$$(32) \qquad \begin{cases} \bar{u} = \bar{u}_1 + \rho\,\bar{u}_2 \\ \bar{v} = k\bar{u}_1 + \bar{v}_1 + \rho\,(k\bar{u}_2 + \bar{v}_2) \end{cases}$$

ρ étant racine de l'équation

$$(33) \qquad \rho^2 + \rho\left(2\cos\varphi + \frac{m}{k}\right) + 1 = 0.$$

Cherchons l'équation de la surface des singularités, en coordonnées cartésiennes. Prenons la droite D_1 comme axe des z et, comme axe des x, la droite qui rencontre orthogonalement les droites D_1 et D_2. Soit a la plus courte distance des droites D_1 et D_2, leurs coordonnées homogènes sont consignées dans le tableau suivant :

$$(34) \quad \begin{array}{c|cccccc} & \alpha & \beta & \gamma & p & q & r \\ D_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & -a\cos\varphi & a\sin\varphi \end{array}$$

Les coordonnées homogènes de la droite (32) sont donc

$$\alpha = 0,\ \beta = \rho\sin\varphi,\ \gamma = 1 + \rho\cos\varphi$$
$$p = 0,\ q = \rho(k\sin\varphi - a\cos\varphi),\ r = \rho(k\cos\varphi + a\sin\varphi) + k.$$

Les équations des projections d'une droite $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ sur les plans des yz et des xz sont

$$\gamma y - \beta z = p,$$
$$\alpha z - \gamma x = q.$$

Dans le cas actuel, α et p étant nuls, elles se réduisent à

$$\frac{y}{z} = \frac{\beta}{\gamma},$$
$$z = -\frac{q}{\gamma},$$

ou, en tenant compte des valeurs trouvées pour β, γ, q,

$$(35) \qquad \frac{y}{z} = \frac{\rho\sin\varphi}{1 + \rho\cos\varphi},$$

$$(36) \qquad z = -\frac{\rho(k\sin\varphi - a\cos\varphi)}{1 + \rho\cos\varphi}.$$

Ces équations montrent que la surface des singularités est un conoïde droit admettant l'axe des x comme directrice rectiligne.

De l'équation (33), on tire

$$k = -\frac{m\rho}{1+\rho^2+2\rho\cos\varphi},$$

et du tableau (34) on déduit

$$m = a\sin\varphi.$$

Par suite,

$$k = \frac{-a\rho\sin\varphi}{1+\rho^2+2\rho\cos\varphi},$$

et l'équation (36) devient

$$z = \frac{a\rho(\rho+\cos\varphi)}{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}. \tag{37}$$

L'élimination de la variable ρ entre les équations (35) et (37) donnera l'équation de la surface des singularités. On trouvera ainsi, après des calculs fort simples,

$$xz(y^2+z^2) - ay(z\cot\varphi + y)(z - y\cot\varphi) = 0$$

ou

$$xz(y^2+z^2) - ay(bz+y)(z-by) = 0$$

en posant

$$\cot\varphi = b.$$

Comme on devait s'y attendre, la surface des singularités est du quatrième ordre ; elle est unicursale et admet comme droite triple l'axe des x, c'est-à-dire la plus courte distance des droites D_1 et D_2. Elle renferme la famille de biquadratiques gauches

$$y^2 + z^2 = \lambda y,$$

$$xz = \frac{a}{\lambda}(y+bz)(z-by).$$

Enfin *les lignes asymptotiques de cette surface sont du sixième ordre*. En effet, dans le mémoire cité page 46, M. Picard a démontré que les surfaces réglées dont les génératrices s'appuient toutes sur deux directrices rectilignes ont des lignes asymptotiques d'un degré égal à la classe d'une section plane quelconque de la surface. Cette propriété s'applique évidemment aux conoïdes ; or, dans le cas actuel, une section plane quelconque de la surface est une quartique admettant un point triple. La classe de cette courbe étant égale à 6, le théorème se trouve démontré.

SECTION III.

ETUDE DE QUELQUES COMPLEXES DONT LA CONSIDÉRATION SE DÉDUIT DE CELLE DU COMPLEXE LINÉAIRE.

1. *Formules préliminaires.* Soit

$$\lambda \bar{u} + \bar{\mu} \bar{v} = 0 \tag{1}$$

l'équation d'un complexe linéaire ; dans tout ce qui va suivre, nous supposerons le vecteur $\bar{\mu}$ unitaire.

Soient (π) un plan quelconque et P son pôle par rapport au complexe (1) ; ce plan renferme la perpendiculaire PQ abaissée du point P sur l'axe central A du complexe. Nous appelerons i l'angle de la normale au plan (π) et de l'axe A.

Considérons dans le plan (π) une droite D. Soient : δ sa plus courte distance à l'axe central A, θ l'angle qu'elle fait avec cet axe, $\frac{\pi}{2} - \varphi$ l'angle de D et de PQ. Soit enfin ϖ la distance PH du point P à la droite D.

Menons, par un point quelconque 0, trois droites $0a$, $0d$ et $0p$ respectivement parallèles à l'axe central A, à la droite D et à la droite PQ. Soient a, d, p les points d'intersection de ces droites avec une sphère du centre 0 et de rayon égal à l'unité. Dans le triangle sphérique $a\,d\,p$ qu'on obtient ainsi, on connaît

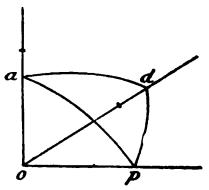


Fig. 15.

$$ap = \frac{\pi}{2},\ ad = \theta,\ dp = \frac{\pi}{2} - \varphi,\ apd = i.$$

L'application de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donne dès lors

$$\cos\theta = \cos\varphi \sin i. \tag{2}$$

En désignant par m le moment de la droite D par rapport au complexe (1), on a (I, n° 18)

$$m = \varpi \cos i. \tag{3}$$

Cela posé, admettons que la droite D se meuve dans le plan (π) de manière qu'on ait constamment

$$F(m, \theta) = 0,$$

et cherchons l'enveloppe de cette droite. La relation précédente peut s'écrire, en tenant compte de (2) et de (3),

$$F[\varpi \cos i, \text{arc cos}(\cos\varphi \sin i)] = 0. \tag{4}$$

Prenons deux axes rectangulaires PX, PY, l'axe PX étant dirigé suivant PQ. Observons que ϖ et φ sont les coordonnées polaires de la projection orthoganale H du point P sur la droite D. Par suite, l'enveloppe cherchée est l'antipodaire, par rapport au point P, de la courbe représentée en coordonnées polaires (ϖ, φ) par l'équation (4).

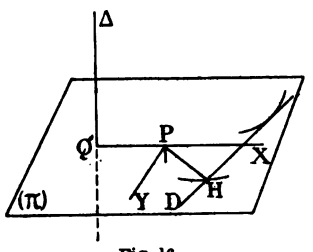


Fig. 16.

I. Complexe des droites perpendiculaires a leurs conjuguées par rapport a un complexe linéaire.

2. *Equation du complexe.* Soit D $(\vec{u}, \vec{v})$ une droite quelconque du complexe que nous allons étudier. La direction $\vec{u}_1$ de la conjuguée de cette droite par rapport au complexe (1) est donnée par la formule

$$\vec{u}_1 - \vec{u} = a\,\vec{\mu} \tag{5}$$

dans laquelle

$$a = -\frac{\bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v}}{k}. \tag{6}$$

Par hypothèse

$$\bar{u}\,\bar{u}_1 = 0 ; \tag{7}$$

multiplions par $\bar{u}$ les deux membres de (5), nous aurons, à cause de (7),

$$-u^2 = a\,\bar{\mu}\,\bar{v}$$

ou, en introduisant l'expression (6) de a,

$$k\,u^2 = \bar{\mu}\,\bar{u}\,(\bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v}). \tag{8}$$

Telle est l'équation du complexe actuel ; comme elle est du second degré par rapport aux coordonnées $\bar{u}$ et $\bar{v}$, le complexe est quadratique.

3. *Propriété géométrique du complexe.* Le conjuguée D_1 de la droite D fait avec l'axe central un angle $\frac{\pi}{2} - \theta$; on a donc (I, n° 14)

$$\delta \cot \theta = k.$$

4. *Courbe du complexe relative à un plan quelconque* (π). Soit D une droite quelconque du complexe située dans (π). L'équation (8) peut s'écrire

$$k = m \cos \theta$$

ou, en tenant compte des égalités (2) et (3),

$$k = \varpi \cos \varphi \sin i \cos i.$$

Prenons, comme au n° 1, deux axes rectangulaires PX, PY, l'axe PX étant dirigé suivant la perpendiculaire PQ à l'axe central. Soient X,Y les coordonnées du point H, on a

$$\varpi \cos \varphi = X$$

et l'équation précédente devient

$$X = \frac{k}{\sin i \cos i}.$$

La podaire, par rapport au point P, de la courbe du complexe est donc une parallèle à l'axe PY. Par conséquent :

La courbe du complexe, relative à un plan quelconque, est une parabole admettant, comme foyer, le pôle du plan, par rapport au complexe linéaire, et, comme axe, la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe central.

Le paramètre de cette parabole est égal à $\frac{8k}{\sin 2i}$.

5. *Cône* (C) *du complexe relatif à un point quelconque* P. Nous placerons en P l'origine des coordonnées, en sorte que, dans l'équation du complexe linéaire

$$\bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v} = 0,$$

le vecteur $\bar{\lambda}$ sera perpendiculaire au plan polaire (P) du point P.

Pour toute droite du complexe actuel, issue de P, la coordonnée $\bar{v}$ est nulle et l'équation (8) donne

$$k\,u^2 = \bar{\lambda}\,\bar{u}.\,\bar{\mu}\,\bar{u}. \qquad (9)$$

Par le point P, menons une parallèle à l'axe central du complexe (1) et une perpendiculaire au plan (P). Soient A et B les points d'intersection de ces droites avec un plan (π) perpendiculaire à l'axe central. Appelons G le point où le plan (π) est rencontré par une génératrice quelconque du cône (C). On a, $\bar{\mu}$ étant supposé unitaire,

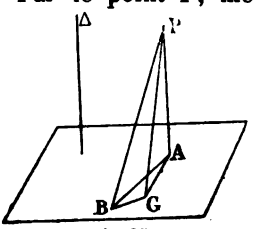


Fig. 17.

$$k = \bar{\lambda}\,\bar{\mu} = \lambda \cos \mathrm{APB},$$
$$\bar{\lambda}\,\bar{u} = \lambda u \cos \mathrm{GPB},$$
$$\bar{\mu}\,\bar{u} = u \cos \mathrm{APG},$$

d'où, en substituant dans (9),

$$\cos \mathrm{APB} = \cos \mathrm{APG}.\cos \mathrm{GPB}.$$

Cette égalité montre que le trièdre (P, AGB) est rectangle suivant l'arête P G ; on en conclut aisément que l'angle A G B est droit. Par conséquent, *le cône du complexe, relatif au point* P, *coupe le plan* (π) *suivant la circonférence décrite sur* AB *comme diamètre.*

II. Complexe des droites qui font avec leurs conjuguées un angle constant, non droit.

6. *Équation du complexe.* Soient D $(\overline{u}, \overline{v})$ une droite quelconque du complexe et D_1 $(\overline{u}_1, \overline{v}_1)$ sa conjugée par rapport au complexe (1). On a [I, form. (12)]

$$\overline{u}_1 - \overline{u} = a\,\overline{\mu}. \tag{10}$$

D'autre part,

$$\overline{u}\,\overline{u}_1 = \rho\, u\, u_1, \tag{11}$$

ρ désignant le cosinus de l'angle constant compris entre D et D_1. Il s'agit d'éliminer u_1 et $\overline{u}_1$ entre les équations (10) et (11). Multiplions par $\overline{u}$ les deux membres de (10), nous aurons, en tenant compte de l'égalité (11),

$$\rho\, u\, u_1 - u^2 = a\,\overline{\mu}\,\overline{u}$$

d'où

$$u_1 = \frac{u^2 + a\,\overline{\mu}\,\overline{u}}{\rho\, u}.$$

Mais l'équation (10) donne

$$u^2_1 = (\overline{u} + a\,\overline{\mu})^2.$$

Comparant les deux dernières égalités, on obtient l'équation du complexe, savoir :

$$(\overline{u} + a\,\overline{\mu})^2\,\rho^2\,u^2 = (u^2 + a\,\overline{\mu}\,\overline{u})^2. \tag{12}$$

Rappelons qu'on déduit a de la formule

$$a = -\frac{\bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v}}{k}. \qquad (13)$$

7. *Propriété géométrique du complexe.* Soit θ_0 l'angle des droites D et D_1. L'angle que D_1 fait avec l'axe central est $\theta_0 - \theta$; on a donc

$$\delta \operatorname{tg}(\theta_0 - \theta) = k.$$

8. *Courbe du complexe relative à un plan quelconque* (π). L'équation (12) peut s'écrire

$$(u^2 + a^2 + 2au\cos\theta)\,\rho^2 = (u + a\cos\theta)^2,$$

mais (13) donne

$$k\,a = -m\,u$$

et, en substituant, on trouve

$$(k^2 + m^2 - 2km\cos\theta)\,\rho^2 = (k - m\cos\theta)^2.$$

L'équation de la podaire de la courbe cherchée s'obtient en mettant pour m et $\cos\theta$ les valeurs (3) et (2). Nous aurons ainsi

$$(k^2 + \varpi^2\cos^2 i - k\varpi\cos\varphi\sin 2i)\,\rho^2 = (k - \varpi\cos\varphi\sin i\cos i)^2$$

ou, en passant aux coordonnées cartésiennes,

$$[k^2 + (X^2 + Y^2)\cos^2 i - k\sin 2i.\,X]\,\rho^2 = (k - \frac{1}{2}\sin 2i.\,X)^2.$$

Cette équation représente une conique symétrique par rapport à la droite PQ (axe des X). Par conséquent :

La courbe du complexe, relative à un plan quelconque (π), *est l'antipodaire, par rapport au pôle* P *de ce plan, d'une conique admettant comme axe de symétrie la perpendiculaire abaissée du point* P *sur l'axe central.*

Cette courbe étant du quatrième ordre, le complexe lui-même est du quatrième ordre, ce qu'on aurait pu déduire de la considération de l'équation (12).

III. Complexe des droites dont la plus courte distance a la conjuguée est constante.

9. *Equation du complexe.* Soit δ_0 la plus courte distance d'une droite D $(u, \bar{v})$ du complexe à sa conjuguée D_1 $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$, par rapport au complexe (1). On a

$$\bar{u}_1 - \bar{u} = a\,\bar{\mu}$$

d'où, en effectuant sur les deux membres de cette égalité l'opération $M\,\bar{u}$,

$$M\,\bar{u}_1\,\bar{u} = a\,M\,\bar{\mu}\,\bar{u}.$$

Elevant au carré, nous aurons, en appelant ω l'angle des droites D et D_1,

$$u^2\,\bar{u}_1^2 \sin^2\omega = a^2\,(M\,\bar{\mu}\,\bar{u})^2.$$

Mais nous avons démontré (I, n° 15) que

$$\delta_0 \sin\omega = -\frac{a^2\,k}{u\,u_1}.$$

Eliminant, entre les deux équations ci-dessus, le produit $u\,u_1 \sin\omega$, et tenant compte de l'égalité

$$a = -\frac{\bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v}}{k},$$

nous obtiendrons l'équation du complexe, savoir

$$\delta_0^2\,(M\,\bar{\mu}\,\bar{u})^2 = (\bar{\lambda}\,\bar{u} + \bar{\mu}\,\bar{v})^2. \qquad (14)$$

Comme on le voit, le complexe est quadratique.

10. *Propriété géométrique du complexe.* La plus courte distance de D_1 à l'axe central est évidemment $\delta_0 - \delta$. (I, n° 13). On a donc (I, n° 14)

$$(\delta_0 - \delta)\,\mathrm{tg}\,\theta = k.$$

11. *Courbe du complexe relative à un plan quelconque* (π). L'équation (14) donne

$$\delta_0^2 \sin^2 \theta = m^2$$

d'où, en se reportant aux équations (2) et (3),

$$\delta_0^2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 i) = \varpi^2 \cos^2 i.$$

On tire de là

$$\varpi^2 = \frac{\delta_0^2}{\cos^2 i} - \delta_0^2 \operatorname{tg}^2 i \sin^2 \varphi. \tag{15}$$

Or, la distance du centre de la conique

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1$$

à une tangente faisant l'angle φ avec l'axe des X est donnée par la formule

$$\varpi^2 = A \sin^2\varphi + B \cos^2\varphi = B + (A - B) \sin^2\varphi.$$

On peut identifier cette formule avec (15) en posant

$$B = \frac{\delta_0^2}{\cos^2 i}, \quad A - B = -\delta_0^2 \operatorname{tg}^2 i$$

d'où

$$A = B - \delta_0^2 \operatorname{tg}^2 i = \frac{\delta_0^2}{\cos^2 i} - \delta_0^2 \operatorname{tg}^2 i = \delta_0^2.$$

Par conséquent :

La courbe du complexe, relative à un plan quelconque (π), *est une ellipse dont le centre est le pôle* P *du plan* (π) *et dont l'un des axes de symétrie est la perpendicalaire abaissée de* P *sur l'axe central. Les demi axes de cette ellipse sont* δ_0 *et* $\frac{\delta_0}{\cos i}$.

12. *Cône du complexe, relatif à un point quelconque* P. P étant l'origine des coordonnées, l'équation de ce cône est

$$\delta_0^2 (\vec{M}\, \vec{\mu}\, \vec{u})^2 = (\vec{\lambda}\, \vec{u})^2. \tag{16}$$

Par le point P, menons une droite PA, parallèle à l'axe central, et une droite PB, perpendiculaire au plan polaire (P) du point P. Soient α et β les angles que ces droites font avec une génératrice quelconque PG du cône du complexe.

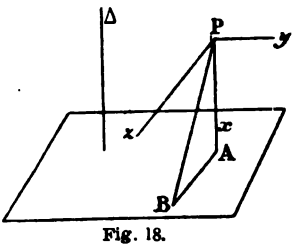


Fig. 18.

L'équation (16) donne

$$\delta_0^2 \sin^2 \alpha = \lambda^2 \cos^2 \beta ;$$

or, i désignant l'angle APB, on a

$$k = \bar{\lambda}\,\bar{\mu} = \lambda \cos i,$$

et l'égalité précédente devient

$$(17) \qquad \frac{\delta_0^2}{k^2}(1 - \cos^2 \alpha) = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 i}.$$

Prenons trois axes rectangulaires Px, Py, Pz tels que Px coïncide avec PA et que le plan des xz coïncide avec le plan APB. On a, en appelant x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la génératrice PG,

$$\cos^2 \alpha = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\cos^2 \beta = \frac{(x \cos i + z \sin i)^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Substituant dans (17), on trouve

$$\delta_0^2 (y^2 + z^2) = k^2 (x + z \operatorname{tg} i)^2.$$

L'intersection de ce cône avec le cylindre

$$y^2 + z^2 = k ,$$

se compose de deux coniques dont les plans sont représentés par l'équation

$$x = - z \operatorname{tg} i \pm \delta_0.$$

Or ces plans sont perpendiculaires à PB, c'est à dire parallèles au plan (P). On a donc la construction suivante du cône du complexe :

Soit (P') *un plan parallèle à* (P) *et coupant* PA *en un point distant de* P *de la longueur* δ_0.

Soit (K) *un cylindre de révolution autour de* PA, *et dont le rayon de la section droite égale* k.

Cela posé, le plan (P') *coupe le cylindre* (K) *suivant une conique qui appartient au cône du complexe relatif au point* P.

IV. Complexe des droites dont le moment par rapport a la conjuguée est constant.

13. *Equation du complexe.* Soient $(\bar{u}, \bar{v})$ les coordonnées d'une droite D du complexe, $(\bar{u}_1, \bar{v}_1)$ les coordonnées de sa conjuguée et m_0 la valeur constante du moment de ces deux droites. On a [I, formules (17), (15) et (12)]

$$a^4 k^2 = m_0^2 u^2 u_1^2,$$
$$ak = -(\bar{\lambda}\bar{u} + \bar{\mu}\bar{v}),$$
$$\bar{u}_1 = \bar{u} + a\bar{\mu}.$$

Si entre ces trois équations nous éliminons a, u_1 et $\bar{u}_1$, nous obtiendrons l'équation du complexe, savoir

$$(18) \quad (\bar{\lambda}\bar{u} + \bar{\mu}\bar{v})^4 = k^2 m_0^2 u^2 (u^2 + a^2 + 2a.\bar{\mu}\bar{u}).$$

14. *Courbe du complexe relative à un plan* (π). On a, $\bar{\mu}$ étant toujours supposé unitaire,

$$\bar{\lambda}\bar{u} + \bar{\mu}\bar{v} = mu,$$
$$ak = -mu.$$

Substituant dans l'équation (18), on trouve

$$(19) \qquad m^4 = m_0^2 (k^2 + m^2 - 2km\cos\theta).$$

Cette égalité constitue une nouvelle définition du complexe actuel.

Pour obtenir l'équation de la courbe du complexe, remplaçons, dans (19), m et cos θ par les expressions (3) et (2) ; nous aurons

$$\varpi^4 \cos^4 i = m^2_0 (k^2 + \varpi^2 \cos^2 i - k \varpi \cos \varphi \sin 2i).$$

Passons aux coordonnées cartésiennes au moyen des formules

$$\varpi \cos \varphi = X,$$
$$\varpi \sin \varphi = Y ;$$

nous obtiendrons l'équation

$$(X^2 + Y^2)^2 \cos^4 i = m^2_0 [k^2 + (X^2 + Y^2) \cos^2 i - k \sin 2i. X]$$

qui est celle d'une quartique bicirculaire. Donc :

La courbe du complexe, relative à un plan quelconque, est l'antipodaire d'une quartique bicirculaire, par rapport au pôle de ce plan

APPENDICE.

NOTE SUR LE COMPLEXE DES DROITES PAR LESQUELLES ON PEUT MENER A UNE QUADRIQUE DEUX PLANS TANGENTS RECTANGULAIRES (1).

1. Ce complexe, qui est du second ordre, a déjà été l'objet d'une étude approfondie, due à Painvin. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872, p. 49.) Nous nous proposons d'en faire connaître ici un certain nombre de propriétés. A cet effet, nous démontrerons d'abord deux théorèmes concernant les surfaces du second ordre.

THÉORÈME I. — *Étant donnés, dans l'espace, des points* P_i, *au nombre de n, désignons par* p_i *la distance du plan* P_i *à un point mobile* P. *Cela posé, si l'on a*

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i p_i^2 = \rho, \tag{1}$$

les quantités a_i *et* ρ *étant des constantes, le plan* P *enveloppera une surface du second ordre.*

Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées rectangulaires du point P_i et

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

l'équation du plan P. On a

$$p_i = \frac{ux_i + vy_i + wz_i + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

d'où, en substituant dans (1),

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i (ux_i + vy_i + wz_i + 1)^2 = \rho (u^2 + v^2 + w^2),$$

(1) Cette Note a déjà paru dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, tome XX, page 122.

ou encore, tous calculs faits,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} u^2\left(-\rho+\sum_1^n a_i x_i^2\right) \\ +v^2\left(-\rho+\sum_1^n a_i y_i^2\right)+w^2\left(-\rho+\sum_1^n a_i z_i^2\right) \\ +2vw\sum_1^n a_i y_i z_i+2wu\sum_1^n a_i z_i x_i+2uv\sum_1^n a_i x_i y_i \\ +2u\sum_1^n a_i x_i+2v\sum_1^n a_i y_i+2w\sum_1^n a_i z_i+\sum_1^n a_i=0. \end{array}\right.$$

L'enveloppe du plan P est donc une quadrique ayant les mêmes plans principaux que la quadrique centrale d'inertie relative à des masses a_i placées aux points P_i.

Ces considérations s'appliquent évidemment au cas où les masses a_i seraient en nombre infini et formeraient une matière continue.

L'équation (2) montre que si ρ varie, les quantités a_i restant constantes, l'équation (1) représente une famille de quadriques homofocales.

THÉORÈME II. — *Etant donnée la quadrique*

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} au^2+a'v^2+a''w^2+2bvw+2b'wu+2b''uv \\ \qquad\qquad +2cu+2c'v+2c''w+d=0, \end{array}\right.$$

il existe une infinité de relations linéaires entre les carrés des distances d'un plan tangent quelconque à dix points fixes, pris arbitrairement dans l'espace et non situés sur une surface du second ordre.

Faisons dans l'équation (2) $n = 10$, et identifions-la avec l'équation (3) ; nous aurons ainsi les dix équations linéaires

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_1^{10} a_i x_i^2 = a+\rho, \quad \sum_1^{10} a_i y_i^2 = a'+\rho, \\ \sum_1^{10} a_i z_i^2 = a''+\rho, \ \ldots, \quad \sum_1^{10} a_i = d. \end{array}\right.$$

Ces équations seront toujours compatibles, car si le déterminant des coefficients des inconnues était nul, les dix points P_i seraient situés sur une surface du second ordre, ce qui est contraire à l'hypothèse. Nous pourrons donc toujours déduire des équations (4) un système de valeurs des inconnues $a_1, \ldots, a_{10}$. Ces valeurs dépendront des coefficients de l'équation (3) et de la quantité arbitraire ρ. Cela posé, entre les distances des dix points P_i à tout plan tangent de la quadrique (3), il existera la relation

$$(5) \qquad \sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho.$$

Si l'on fait $\rho = 0$, on obtient la relation linéaire et *homogène*

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = 0.$$

2. Pour la facilité du langage, nous donnerons au complexe actuel le nom de *complexe de Painvin*. Ce complexe jouit de la propriété suivante :

Un complexe de Paivin étant donné, il existe une infinité de relations entre les carrés d'une droite quelconque du complexe à dix points pris arbitrairement dans l'espace et non situés sur une surface du second ordre.

Soient D une droite quelconque du complexe de Painvin relatif à la quadrique (3) et P, P' les plans tangents rectangulaires que l'on peut mener à cette quadrique par la droite D. Soient p_i, p'_i, d_i les distances du point P_i respectivement au plan P, au plan P' et à la droite D. La formule (5) donne

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho, \quad \sum_1^{10} a_i p'^2_i = \rho,$$

d'ou, par addition,

$$\sum_1^{10} a_i (p_i^2 + p'^2_i) = 2\rho ;$$

or,

$$p_i^2 + p'^2_i = d_i^2,$$

par suite

$$(6) \qquad \sum_{1}^{40} a_i d_i^2 = 2\rho.$$

Le théorème est donc démontré. Si $\rho = 0$, la relation (6) se réduit à

$$\sum_{1}^{40} a_i d_i^2 = 0.$$

3. Les considérations qui précèdent vont nous permettre de trouver l'équation du complexe de Painvin par rapport à des axes rectangulaires quelconques. Soient $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ les coordonnées homogènes d'une droite D du complexe. La distance d_i du point $P_i\,(x_i, y_i, z_i)$ à cette droite est donnée par la formule

$$\begin{aligned}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, d_i^2 = {} & x_i^2\,(\beta^2 + \gamma^2) + y_i^2\,(\gamma^2 + \alpha^2) + z_i^2\,(\alpha^2 + \beta^2) \\ & - 2\,\alpha\beta x_i y_i - 2\,\beta\gamma y_i z_i - 2\,\gamma\alpha z_i x_i \\ & + 2\,x_i\,(q\gamma - r\beta) + 2\,y_i\,(r\alpha - p\gamma) \\ & + 2\,z_i\,(p\beta - q\alpha) + p^2 + q^2 + r^2.\end{aligned}$$

Portant, dans (6), la valeur de d_i^2 et tenant compte des relations (4), nous obtiendrons l'équation du complexe, à savoir

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha^2(a + a'') + \beta^2\,(a'' + a) + \gamma^2\,(a + a') \\ \quad - 2\alpha\beta\,b'' - 2\,\beta\gamma b - 2\,\gamma\alpha b' + 2(q\gamma - r\beta)c + 2(r\alpha - p\gamma)c' \\ \qquad + 2(p\beta - q\alpha)c'' + (p^2 + q^2 + r^2)d = 0. \end{cases}$$

Si les axes des coordonnées coïncident avec les axes principaux de la quadrique (3),

$$b = b' = b'' = c = c' = c'' = 0,$$

et l'équation (7) devient

$$\alpha^2\,(a' + a'') + \beta^2\,(a'' + a) + \gamma^2\,(a + a') + (p^2 + q^2 + r^2)\,d = 0.$$

C'est, aux notations près, l'équation obtenue par Painvin dans le Mémoire cité.

4. La forme de l'équation (7) montre que :

Si une congruence est composée des droites communes aux complexes de Painvin de deux quadriques quelconques, représentées en coordonnées tangentielles par les équations

$$\Sigma = 0, \qquad \Sigma' = 0,$$

elle appartiendra également aux complexes de Painvin de toutes les quadriques représentées par l'équation

$$\Sigma + \rho\,\Sigma' = 0,$$

dans laquelle ρ *est un paramètre variable.*

5. Soit

$$f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0$$

l'équation d'un complexe quadratique quelconque.

Considérons tous les complexes quadratiques définis par l'équation

$$(8) \quad f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) + \rho\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

Chacun de ces complexes renferme évidemment celles des droites du complexe

$$f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0,$$

qui sont isotropes. Il suit de là que *les coniques, situées dans un plan et relatives aux complexes* (8), *sont homofocales ;* et que *les cônes de même sommet, relatifs aux complexes* (8), *sont homocycliques.*

Cela posé, soit la famille de quadriques homofocales

$$\begin{aligned}&(a+\rho)\,u^2 + (a'+\rho)\,v^2 + (a''+\rho)\,w^2\\ &+2bvw + 2\,b'wu + 2\,b''uv + 2cu + 2c'v + 2c''w + d = 0.\end{aligned}$$

Les complexes de Painvin relatifs à ces quadriques ont pour équation

$$\alpha^2(a+a'')+\beta^2(a''+a)+\gamma^2(a+a')$$
$$-2\alpha\beta\,b''-2\beta\gamma\,b-2\gamma\alpha\,b'$$
$$+2(q\gamma-r\beta)\,c+2(r\alpha-p\gamma)\,c'+2(p\beta-q\alpha)\,c''$$
$$+(p^2+q^2+r^2)\,d+2\rho(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0.$$

Cette équation rentrant dans le type de l'équation (8), nous pouvons énoncer ce théorème :

Les coniques, relatives à un plan, des complexes de Painvin d'une famille de quadriques homofocales sont homofocales.

Les cônes, relatifs à un point, des complexes de Painvin d'une famille de quadriques homofocales sont homocycliques.

6. Nous avons vu (n° 2) que le complexe de Painvin d'une quadrique quelconque

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho,$$

est défini par l'équation

$$\sum_1^{10} a_i d_i^2 = 2\rho.$$

Cela posé, soient

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho',$$
$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho'',$$

les équations de deux quadriques Q', Q'' homofocales à Q. Cherchons le complexe des droites D par lesquelles on peut mener deux plans rectangulaires P', P'' tangents, l'un P' à la quadrique Q', l'autre P'' à la quadrique Q''. Soient p'_i, p''_i, d_i les distances du point P_i aux plans P, P' et à la droite D. On a

$$\sum_1^{10} a_i p'^2_i = \rho', \quad \sum_1^{10} a_i p''^2_i = \rho'',$$

d'où

$$\sum_{1}^{10} a_i (p'^2_i + p''^2_i) = \rho' + \rho'' ;$$

or,

$$p'^2_i + p''^2_i = d^2_i,$$

par conséquent

$$\sum_{1}^{10} a_i d^2_i = \rho' + \rho''.$$

Si $\rho' + \rho'' = 2\rho$, cette équation représente le complexe de Painvin de la quadrique Q. De là ce théorème :

Le complexe de Painvin relatif à une quadrique Q *peut être considéré, d'une infinité de manières, comme le lieu des droites d'intersection de deux plans rectangulaires* P', P'' *respectivement tangents à deux quadriques* Q', Q'', *homofocales à* Q.

7. Le Théorème I permet de démontrer simplement le théorème bien connu de Monge concernant le lieu du sommet O d'un trièdre trirectangle circonscrit à une surface du second ordre.

Soient p'_i, p''_i, p'''_i les distances du point P_i aux faces de ce trièdre et r_i la distance OP_i. On a

$$\sum_{1}^{10} a_i p'^2_i = \rho, \quad \sum_{1}^{10} a_i p''^2_i = \rho, \quad \sum_{1}^{10} a_i p'''^2_i = \rho,$$

d'où, par addition,

$$\sum_{1}^{10} a_i (p'^2_i + p''^2_i + p'''^2_i) = 3\rho.$$

Or,

$$p'^2_i + p''^2_i + p'''^2_i = r^2_i,$$

par suite,

$$\sum_{1}^{10} a_i r^2_i = 3\rho. \tag{9}$$

Cette équation représente une sphère, ce qui démontre le théorème de Monge. Pour trouver l'équation de cette sphère en coordonnées cartésiennes, appelons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées rectangulaires du point P_i et (x, y, z) celles du point O ; on a

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2,$$

d'où, en substituant dans (9),

$$(x^2 + y^2 + z^2) \sum a_i - 2x \sum a_i x_i - 2y \sum a_i y_i - 2z \sum a_i z_i + \sum a_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 3\rho = 0.$$

ou encore, en tenant compte des formule (4),

$$(x^2 + y^2 + z^2)\, d - 2xc - 2yc' - 2zc'' + a + a' + a'' = 0.$$

8. Le théorème de Monge est susceptible de la généralisation suivante, due à Bobilier (1) :

Si trois plans rectangulaires P', P'', P''' *sont respectivement tangents à trois quadriques homofocales* Q', Q'', Q''', *leur point commun* 0 *décrira une sphère concentrique à ces quadriques.*

Soient

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho', \qquad \sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho'', \qquad \sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho''',$$

les équations des quadriques Q', Q'', Q'''. Appelons p_i', p_i'', p_i''' et r_i les distances du point P_i aux plans P', P'', P''' et au point 0.

On a

$$\sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho', \qquad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \rho'', \qquad \sum_1^{10} a_i p_i'''^2 = \rho''',$$

d'où

$$\sum_1^{10} a_i (p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2) = \rho' + \rho'' + \rho'''.$$

Or

$$p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2 = r_i^2,$$

(1) *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 329.

par suite,

$$\sum_{1}^{10} a_i r_i^2 = \rho' + \rho'' + \rho'''.$$

Cette équation définit la sphère de Monge de la quadrique

$$\sum_{1}^{10} a_i p_i^2 = \frac{\rho' + \rho'' + \rho'''}{3}.$$

Le théorème est donc démontré.

9. *Etant donné dans l'espace n points fixes* P_i, *les droites qui satisfont à la condition*

$$\sum_{1}^{n} a_i d_i^2 = 2\rho \tag{10}$$

constituent un complexe de Painvain.

En effet, si l'on considère la quadrique qui correspond à l'équation

$$\sum_{1}^{n} a_i p_i^2 = \rho,$$

le complexe de Painvin relatif à cette quadrique sera défini par l'équation

$$\sum_{1}^{n} a_i d_i^2 = 2\rho.$$

Pour s'en assurer, il suffit de répéter le raisonnement du n° 2.

Si l'on suppose n infini, on obtient le théorème suivant : *Un corps solide étant donné, les droites par rapport auxquelles ce solide a un moment d'inertie donné, engendrent un complexe de Painvin.*

Ce théorème a été énoncé, il y a quelques années, par M. G. Fouret, dans une communication verbale faite à la Société mathématique de France.

10. Si l'on fait $n = 2$, $\rho = 0$, l'équation (10) devient

$$a_1 d_1^2 + a_2 d_2^2 = 0, \tag{11}$$

ou

$$d_1^2 = \lambda^2 d_2^2, \tag{12}$$

pourvu qu'on pose

$$-\frac{a_2}{a_1} = \lambda^2.$$

Etudions le complexe représenté par l'équation (11). On déduit de (12)

$$d_1 = \lambda d_2.$$

Le complexe actuel est donc celui des droites dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant. Mais ce complexe est aussi le complexe de Painvin de la quadrique représentée par l'équation

$$p_1^2 - \lambda^2 p_2^2 = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(p_1 + \lambda p_2)(p_1 - \lambda p_2) = 0.$$

Cette quadrique se compose des deux points F_1, F_2 qui divisent harmoniquement, dans le rapport λ, le segment $P_1 P_2$.

Donc :

Le complexe des droites dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant est aussi celui des droites par lesquelles on peut mener deux plans rectangulaires passant chacun par un point fixe.

Cette proposition aurait pu être établie également par des considérations de Géométrie pure.

11. On démontrerait sans peine que :

Le cône du complexe, relatif à un point quelconque S, *admet deux directions de sections circulaires perpendiculaires aux droites* SF_1 *et* SF_2.

La conique du complexe, relatif à un plan quelconque P, *admet comme foyers les projections orthogonales, sur ce plan, des points* F_1 et F_2.

12. Nous terminerons cette Note en démontrant une propriété du complexe de Painvin d'une quadrique de révolution à centre

$$au^2 + a' v^2 + a' w^2 + d = 0. \tag{13}$$

Cette quadrique fait partie de la famille de quadriques homofocales

$$(a + \rho) u^2 + (a' + \rho) v^2 + (a' + \rho) w^2 + d = 0.$$

Pour $\rho = -a'$, cette équation se réduit à

$$(a - a') u^2 + d = 0$$

et représente deux points F_1 et F_2, foyers d'une section méridienne quelconque de la quadrique (13). La propriété du n° 11, jointe à celle du n° 5, permet par conséquent d'énoncer ce théorème :

Si l'on considère le complexe de Painvin d'une quadrique de révolution à centre, dont F_1 *et* F_2 *sont les foyers d'une section méridienne quelconque, le cône du complexe, relatif à un point quelconque* S, *admet deux directions de sections circulaires perpendiculaires aux droites* SF_1 *et* SF_2 *; et la conique du complexe, relative à un plan quelconque* P, *admet comme foyers les projections orthogonales sur ce plan des points* F_1 *et* F_2.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

		Pages.
I.	Vecteurs	1
II.	Sommes et différences géométriques	2
III.	Equations géométriques	6
IV.	Equations de projection	7
V.	Produits géométriques.	9
VI.	Moments géométriques	12
VII.	Coordonnées vectorielles	17
VIII.	Fonctions géométriques	17
IX.	Analyse infinitésimale des fonctions géométriques	19
X.	Théorie de la ligne droite	24
XI.	Sur les coordonnées tétraédriques de la droite	29

SECTION I.

Sur le complexe linéaire.

I.	Etude du complexe linéaire.	31
II.	Sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire.	46
III.	Sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe quelconque, et, en particulier, d'un complexe tétraédral.	55
IV.	Sur la congruence des droites communes à deux complexes linéaires.	62
V.	Sur la surface réglée, lieu des droites communes à trois complexes linéaires	65

Section II.

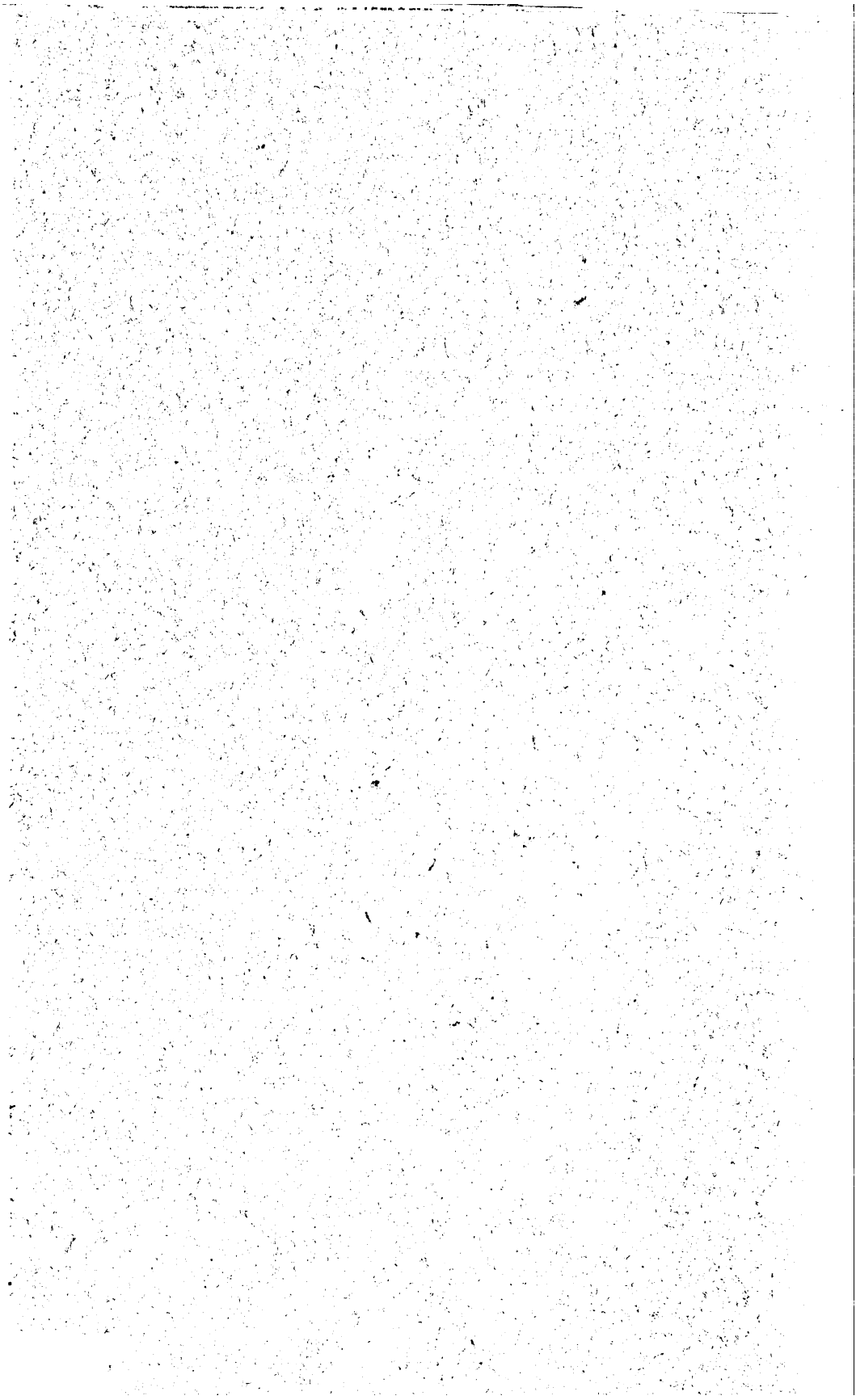
Sur les systèmes de complexes linéaires assujettis à passer par des droites en nombre inférieur à cinq.

I. Sur la surface réglée, lieu des axes centraux des complexes linéaires passant par quatre droites données 70
II. Sur la congruence, lieu des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données 74
III. Sur le complexe, lieu des axes centraux des complexes linéaires passant par deux droites données 88

Section III.

Étude de quelques complexes dont la considération se déduit de celle du complexe linéaire.

I. Complexe des droites perpendiculaires à leurs conjuguées. . . 96
II. Complexe des droites qui font avec leurs conjuguées un angle constant, non droit 99
III. Complexe des droites dont la plus courte distance à la conjuguée est constante 101
IV. Complexe des droites dont le moment par rapport à la conjuguée est constant 104

Appendice.

Note sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires 106